
QA
1
J6836
année
23E
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR
A L'INSTITUT AGRONOMIQUE
AUX BACCALAURÉATS ET AUX ÉCOLES DE COMMERCE

Publié sous la direction

de M. Georges MARIAUD

DIRECTEUR DES ÉTUDES A L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE SAINT-GEORGES
PROFESSEUR A L'INSTITUT COMMERCIAL

PUBLICATION FONDÉE EN 1877

VINGT-TROISIÈME ANNÉE ~~1897-98~~



N° 1. — Octobre 1898.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE ST-CYR

303. Mathématiques. — Etant donnée une demi-circonférence AOB. On propose de trouver sur AB un point P tel que, si par le point P on élève une perpendiculaire sur AB qui rencontre la circonférence en N et que par N on mène une parallèle à AB coupant la circonférence en M, on ait : $2\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2 = K^2$. K étant donnée.

303bis. — Une pyramide a pour base un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en O. On joint le sommet S au point O. Quel est le lieu des sommets S tels que toute section perpendiculaire à SO donne un parallèlogramme.

303ter. Epure. — Décrire au milieu de la feuille une circonférence de centre C et de rayon R = 7 centimètres. Tracer trois rayons faisant entre eux des angles de 120°. Le point S et les extrémités a, b, c des rayons ont respectivement pour côtés

$$S = 12^{cm},25 \qquad a = 2^{m},50 \qquad b = 4^{cm},25 \qquad c = 1^{cm},75.$$

Ces trois droites SA, SB, SC déterminent un trièdre, dont on demande de trouver les 6 éléments.

303quater. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant

$$h = 122^{m},75 \qquad a = 1825^{m},45 \qquad A = 28°31'40''5.$$

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

304. Mathématiques. — Démontrer que si a, b, c représentent les 3 côtés d'un triangle le trinôme

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\,x + c^2$$

est toujours positif.

304bis. — Trouver la vraie valeur de

$$y = x - \sqrt[3]{x^3 + 1}$$

quand x devient infinie.

304ter. **Physique.** — 20 litres d'un gaz sec primitivement à 0° et à la pression de 760 millimètres sont élevés à 40° et se saturent de vapeur d'eau à cette température. On demande ce que devient V. ; $F_{50} = 21^{mm},5$.

304^{quater}. **Calcul logarithmique.** — Calculer

$$x = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\pi} + 231\,478} + 75\,781}}{2,4789 - 1,665 + 1825}.$$

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

305. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Résoudre l'équation

$$3x - 5 - \sqrt{x^2 - 2x + 85} = 0.$$

Résoudre et discuter :

$$mx^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 2m - 6 = 0$$

sachant que x est entre -1 et $+1$.

(*Au choix*) *a*). Enoncer et démontrer les théorèmes qui conduisent au volume de la sphère.

b) Enoncer et démontrer les théorèmes qui conduisent à la surface de la sphère.

c) Etablir le rapport de la circonférence au diamètre.

305bis. **Physique.** — Un tube de verre pèse vide 15 grammes, plein de mercure à 0°, 347 grammes. On chauffe dans un bain d'huile, il perd 10 grammes de mercure. Quelle est la température du bain. Le coefficient de dilatation du mercure $= \frac{1}{6\,480}$.

(*Au choix*) *a*). — Coefficient de dilatation des gaz.

b) Vapeurs saturantes et non saturantes. Principe de la paroi froide.

c) Définition de l'état hygrométrique. Principaux hygromètres.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

306. Mathématiques. (*Obligatoire*), — Exprimer que la droite $2x + 5y - 1 = 0$ est tangente au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et calculer le rayon R de ce cercle quand il en est ainsi.

(*Au choix*) *a*). — Angle de deux droites.

b) Angle de deux plans.

c) Angle d'une droite et d'un plan.

306bis. Physique. — Un aéromètre de Farenheit demande une charge de 10 grammes pour affleurer dans un liquide ; pour affleurer dans l'eau il faut une charge de 50 grammes. On demande la densité du liquide sachant que l'aéromètre pèse 50 grammes.

(*Au choix*) *a*). — Machine d'Atwood et lois que l'on peut en déduire.

b) Siphon et pompes.

c) Plan incliné et appareil Morin.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

307. Arithmétique. — On a placé à intérêts simples deux capitaux qui sont entre eux comme $3\frac{3}{4}$ est à $4\frac{5}{6}$; le premier capital, placé à raison de 4 % pendant 6 ans et 4 mois, a produit 1071 francs d'intérêt de plus que le deuxième capital, placé à raison de 3 % pendant 4 ans $\frac{1}{2}$. Quels sont ces capitaux.

307bis. — Calculer $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{75\,280}{\sqrt[3]{6\,543}}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

308. — Un marchand a rempli une barrique de 228 litres avec du vin et de l'eau. Il a mis cinq fois moins d'eau que de vin. En vendant le mélange 0fr,70 le litre, il a gagné 0fr,10 par litre. A combien lui revenait le litre de vin (par l'arithmétique).

308bis. Géométrie. — La surface totale d'un tétraèdre

régulier étant égale à un décimètre carré. Calculer le volume de ce tétraèdre.

308ter. Algèbre. — Résoudre l'équation

$$\frac{a-b}{4(x-a)} + \frac{x+2b}{a+b} = 2.$$

308^{quater}. — Calculer x donné par la formule

$$x = \sqrt{\frac{75\,280}{\sqrt{\pi + 2\,531}}}.$$

DEUXIÈME & TROISIÈME PARTIE

QUESTION 757

Soit AB *la corde polaire d'un point* M *par rapport à une parabole* P. *Montrer que la droite qui unit le sommet de* P *à la projection de* M *sur la directrice de* P, *passe par l'orthocentre du triangle* MAB.

(E.-N. Barisien).

Solution, par **A. Droz-Farny**

Soient Δ la directrice, S et F respectivement le sommet et le foyer de la parabole. Le diamètre de la parabole passant par M coupe Δ en m, P en D et la corde AB en son point milieu C.

On voit que D est le point milieu de MC, et que la tangente $\alpha\beta$ en ce point est parallèle à AB. D'après un théorème connu l'orthocentre h du triangle $M\alpha\beta$ est sur Δ ; on obtiendra donc l'orthocentre du triangle MAB en prenant le symétrique H de M par rapport à h. mF étant perpendiculaire à $\alpha\beta$, si l'on porte mM' équipollente FS, la droite SM' sera parallèle à MH et divisée par Δ en s en parties égales. Comme $\frac{\mathrm{M}h}{h\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{M}'s}{s\mathrm{S}}$ les trois points m, S et H sont en ligne droite.

Remarque. — Lorsque le point M se déplace sur son diamètre, le lieu géométrique des orthocentres des triangles MAB est la droite mS.

Solution exacte : **Francis Dauzats.**

QUESTION 759

On donne une parabole P *et une droite* D *perpendiculaire à son axe. Soient* M *un point quelconque de* D *et* AB *la corde polaire de* M *par rapport à* P. *Montrer que les triangles* MAB *ont leur orthocentre situé sur une droite fixe parallèle à* D *et que leur centre de gravité décrit une parabole.* **(E.-N. Barisien).**

Solution, par **A. Droz-Farny**

Soient Δ la directrice, S et F respectivement le sommet et le foyer de la parabole. Le diamètre passant par M coupe la parabole en P et la corde

polaire AB en son point milieu. On sait que P est le point milieu de MC, que la tangente $\alpha\beta$ en ce point est parallèle à AB et que l'orthocentre h du triangle $M\alpha\beta$ se trouve sur Δ. On trouvera donc l'orthocentre du triangle MAB en prolongeant Mh d'une longueur $hH = Mh$. Si M se meut sur D le lieu de H sera donc la symétrique de D par rapport à Δ.

Soit G le centre de gravité du triangle MAB et représentons par R et h les pieds des perpendiculaires abaissées de P et G sur l'axe et par d la distance DΔ. On a I $\overline{PR}^2 = 2p.RS.$

Or $$MP = 3PG = d + \frac{p}{2} + SR.$$

Donc $$SL = SR + PG = \frac{4SR + d + \frac{p}{2}}{3} \quad \text{et} \quad SR = \frac{3.SL - \left(d + \frac{p}{2}\right)}{4}.$$

Portons cette valeur dans I elle deviendra

$$\overline{GL}^2 = \frac{p}{2}\left[3SL - \left(d + \frac{p}{2}\right)\right].$$

Le lieu est donc une parabole de paramètre $\frac{3p}{4}$ ayant son sommet au tiers de SD à partir de S.

Remarque. — Lorsque la droite D est symétrique de la tangente au sommet par rapport à Δ tous les triangles MAB ont le sommet S pour orthocentre.

Dans ce cas le théorème I est donc en défaut.

Solution exacte : **F. Dauzats.**

QUESTION 761

Soient M *et* M', *deux points d'une parabole, symétriques par rapport à son axe. La parallèle à l'axe, menée par* M', *rencontre en* J *la normale en* M. *Le cercle de centre* J *et de rayon* JM *rencontre la parabole en deux autres points* P *et* Q, *Montrer que les droites* MP *et* MQ *sont inclinées à 45° sur l'axe de la parabole.* **(E.-N. Barisien).**

Solution, par A. Droz-Farny

On sait que si le sommet d'un angle droit M, pivote autour d'un point M d'une section conique quelconque, les côtés de l'angle déterminent par leurs intersections avec la conique, une corde PQ qui coupe la normale en M, en un point fixe J (théorème de Frégier).

Si dans la parabole un des côtés de l'angle droit MM' est perpendiculaire à l'axe, le second côté sera le diamètre du point M et, par conséquent, l'hypothénuse du triangle sera le diamètre du point M'. J est donc le point de Frégier de M

Menons par J la corde de la parabole parallèle à la tangente en M'. Cette corde PQ sera divisée en J en deux parties égales et comme le triangle PMQ est rectangle en M on a : PJ = JQ = JM. Le cercle décrit de J comme centre avec JM comme rayon coupe donc la parabole suivant les quatre

points PMMQ et comme d'après un théorème connu MP et MQ constituent deux côtés opposés du quadrilatère, ces droites forment avec l'axe de la parabole des angles égaux donc de 45°, puisque angle PMQ = 90°.

Solution exacte : **Francis Dauzats.**

QUESTION 778

Dans tout trapèze dont les diagonales sont rectangulaires, la somme des carrés des diagonales est équivalente au carré de la somme des deux côtés parallèles. (**E.-N. Barisien**).

Soit ABCD le trapèze donné. En faisant passer par C une parallèle à la diagonale AD il résulte le triangle rectangle BCE dans lequel

$$EB^2 = EC^2 + CB^2, \quad (AB + CD)^2 = EC^2 + CB^2.$$

Georges Rodriguez.

QUESTION 796

Etant donné un triangle AOB *rectangle en* O ; *on prolonge* OA *au-delà du point* A *de la longueur* AA' = OB, *et on prolonge* OB *au-delà du point* B *de la longueur* BB' = OA. *Montrer que l'hypothénuse* AB *est vue du point milieu* C *de* A'B' *sous un angle droit.* (**E.-N. Barisien**).

Le triangle rectangle A'OB' est isoscèle, donc OC est perpendiculaire à A'B' et A'C = CO ; aussi $\widehat{AA'C} = \widehat{COB} = 45°$.

Donc les triangles AA'C et COB sont égaux et par conséquent $\widehat{ACA'} = \widehat{OCB}$, et ajoutant aux deux membres $\widehat{ACO}$, BCA = OCA' = 90°.

Georges Rodriguez.

QUESTION 797

Dans tout triangle ACB, *rectangle en* C, *on a les relations suivantes entre les rayons de quatre cercles tritangents au triangle* ACB. (*Les lettres* a, b, c, p *ont leur signification habituelle*)

$$r_a + r_b = c, \quad r_c = p, \quad r + r_c = a + b, \quad r + r_a + r_b + r_c = 2p,$$

$$r + r_a + r_b = r_c, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}.$$

(**E.-N. Barisien**).

Si D, I, F ; L, F, J ; E, K ; H, M sont les points de tangence de cercles tritangents au triangle rectangle ABC, on a

$$BJ = BG = AF = AD = CE = O_BK = r_b$$

$$AL = AG = BF = BI = CH = O_AM = r_a$$

$$JC = G_cL = r_c$$

$$CI = CD = DO = OI = BH = r$$

(1) $$C = AB = BF + FA = r_a + r_b$$

(1) $$C = r_a + r_b$$

(II) $r_c = JC = CI + IB + BG = \frac{1}{2}\left[(CI + CD) + (AD + AF) + (BF + BJ)\right]$

$$= \frac{1}{2}(2p).$$

(2) $$r_c = p.$$

(III) $a + b = CA + CB = AD + DC + CB = CD + CJ = r + r_c.$

(3) $$a + b + r + r_c.$$

(IV) En additionnant (1) et (3).

(4) $$a + b + c = r + r_a + r_b + r_c = 2p.$$

(V) En remplaçant en (4) à p par r_c de (2).

(5) $$r = r_a + r_b = r_c.$$

(VI) Les triangles BO_AH et BO_CJ sont semblables, donc

$$\frac{HO_A}{HB} = \frac{JO_C}{BJ} \quad \text{ou} \quad \frac{r_a}{r} = \frac{r_c}{r_b}$$

$$rr_c = r_ar_b = CH.CE = (CB - BH)(CA - AE)$$

$= (a - r)(b - r) = ab - \left[r - (a + b)\right] = ab = r\left[r - (r + r_c)\right]$ (de (3))

(6) $$2rr_c = ab.$$

En divisant (3) par (6)

$$\frac{r + r_c}{2rr_c} = \frac{a + b}{ab}, \quad \frac{1}{r}\frac{1}{r_c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}.$$

Georges Rodriguez.

QUESTION 798

Les cercles (C) *et* (C′) *se coupent au point* A *où leurs tangentes sont* t *et* t′, *et au point* B. *Une droite quelconque menée par* A *coupe* (C) *et* (C′) *en* M *et* M′. *Les projections orthogonales de* M *sur* t′ *et de* M′ *sur* t *sont sur un même cercle avec les points* A *et* B. **(M. d'Ocagne).**

Solution, par **Alfredo Schiappa Monteiro**

Désignons par C et C′ les centres des circonférences données (C) et (C′); par a et a' les extrémités des diamètres ACa et $AC'a'$ de celles-ci, passant par A; par m et m' les projections orthogonales sur t' et t des points M et M′ lesquels, avec le point B, déterminent le triangle MBM′; et soit α le point de rencontre des droites $Mm\alpha$ et $M'm'\alpha$, qui, avec la double corde MM′ déterminent aussi le triangle $M\alpha M'$. Or, dans ces deux triangles, les angles B et α, étant égaux entre eux, comme supplémentaires de l'angle mAm' des tangentes t et t', le quadrilatère $M\alpha BM'$ se trouvera inscrit dans le cercle (β), qui a pour centre un point β de la circonférence (c_0) circonscrite au triangle BCC′.

Cela étant, on aura toujours, quelle que soit la position de la transversale MAM′,

$$\sphericalangle M'MB = M'\alpha B \quad \text{et} \quad \sphericalangle M'MB = AaB,$$

comme couples d'angles inscrits respectivement dans les circonférences β et (C), et, par suite, $\sphericalangle M'\alpha B = AaB$;

mais, d'après les conditions présentées, la droite $M'm'\alpha$ étant parallèle au diamètre Aa de (C), le point α se trouvera en ligne droite avec les points B et a, c'est-à-dire appartiendra à la double corde aBa' des cercles (C) et (C'), perpendiculaire à leur corde réelle commune AB.

Ainsi, *quand la double-corde* MAM' *tourne autour de* A, *le sommet* α *du triangle variable* $M\alpha M'$ *décrira la double-corde fixe* aBa'.

Donc, *les cinq points* A, m, α, B, m' *sont sur une circonférence* (λ), *qui a pour diamètre la diagonale* $A\alpha$ *du quadrilatère* $Am\alpha m'$, *et qui passe par les points de concours* A *et* B *des deux cercles* (C) *et* (C').

Q. E. D.

Remarque. — Comme on sait, quand la transversale MAM' tourne autour de A, les extrémités M, M' forment sur les circonférences (C), (C') deux *divisions homographiques* et, par suite, les droites $Mm\alpha$, $M'm'\alpha$ représentent un couple de rayons homologues de deux *faisceaux homographiques*, dont les centres se trouvent à l'infini ; d'où il résulte que le lieu géométrique du point α, qui représente la rencontre de ce couple de rayons variables, sera une conique qui, dans ces cas, se réduit au *segment rectiligne double* aa', qui répond à une ellipse de petit axe nul.

En effet, pendant le mouvement de la transversale MM' autour de A, le triangle MBM' variera, restant constamment semblable à lui-même, et il y aura une position $M_0AM'_0$ de cette transversale pour laquelle les côtés MB, M'B de ce triangle deviendront perpendiculaires aux tangentes t' et t, déterminant le triangle $M_0M'_0B$.

D'après cela, le point variable α coïncidera successivement avec les trois points a, B, a' situés en ligne droite, et, par suite, la conique qu'il engendre se réduira au segment double aa' ou double-corde fixe des cercles donnés. En désignant par α' la rencontre de la transversale MM' avec le cercle (λ), on aura toujours $\frac{M\alpha'}{\alpha'M'} = \frac{a\alpha}{\alpha a'}$.

Alfredo Schiappa Monteiro.

Solutions exactes : **Ernest Foucart, A. Droz-Farny, A. l'Huillier.**

NOTE SUR LA QUESTION 767

L'énoncé exact me parait le suivant :

Démontrer que les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} bx^2 \sin\varphi - 2axy\cos\varphi + \dfrac{y^2}{b\sin\varphi}\left[(a^2+b^2)\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi\right] \\ \qquad + 2y(a^2+b^2)\cos^2\varphi = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} ay^2\cos\varphi - 2bxy\sin\varphi + \dfrac{x^2}{a\cos\varphi}\left[(a^2+b^2)\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi\right] \\ \qquad - 2x(a^2+b^2)\cos^2\varphi = 0, \end{cases}$$

résolues par rapport à x et y, ont pour solutions :

1° $x = 0,\qquad y = 0;$

2° $x = 2a\cos\varphi,\qquad y = 2b\sin\varphi;$

3° $x = \dfrac{2ab^2\cos 2\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},\qquad y = \dfrac{-2a^2b\cos 2\varphi\sin\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi};$

4° $x = \dfrac{2a(a^2+b^2)\sin^2\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},\qquad y = \dfrac{2b(a^2+b^2)\sin\varphi\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi};$

et que l'élimination de φ entre (1) et (2) donne :

$$(x^2+y^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-4a^2b^2)\left[(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2)-4(a^2+b^2)^2x^2y^2\right]$$
$$\left[(x^2+y^2)^2(a^2x^2+b^2y^2)-4(a^2x^2-b^2y^2)^2\right].$$

Je ne m'occupe pas de la solution évidente $x = 0$, $y = 0$. Les équations (1) et (2) se mettent facilement sous les formes :

$$(bx\sin\varphi - ay\cos\varphi)^2 - (a^2+b^2)\cos 2\varphi(y - 2b\sin\varphi)\,y = 0,$$
$$(bx\sin\varphi - ay\cos\varphi)^2 + (a^2+b^2)\cos 2\varphi(x - 2a\cos\varphi)\,x = 0.$$

D'où, par soustraction :

(3) $$x^2 + y^2 - 2(ax\cos\varphi + by\sin\varphi) = 0.$$

Groupant les termes du second degré dans un nombre, les termes du premier dans l'autre et divisant, j'obtiens :

$$\frac{(bx\sin\varphi - ay\cos\varphi)^2 - y^2(a^2+b^2)\cos 2\varphi}{(bx\sin\varphi - ay\cos\varphi)^2 + x^2(a^2+b^2)\cos 2\varphi} = -\frac{by\sin\varphi}{ax\cos\varphi},$$

qui s'écrit

$$(ay\cos\varphi - bx\sin\varphi)\left[(ay\cos\varphi - bx\sin\varphi)(ax\cos\varphi + by\sin\varphi)\right.$$
$$\left.-(a^2+b^2)\cos^2\varphi\,xy\right],$$

ou facilement

$$(ay\cos\varphi - bx\sin\varphi)(ay\operatorname{sid}\varphi - bx\cos\varphi)(by\cos\varphi + ax\sin\varphi) = 0.$$

1° $ay\cos\varphi - bx\sin\varphi = 0$, on a $\dfrac{x}{a\cos\varphi} = \dfrac{y}{b\sin\varphi} = k.$

Portant dans (3) on trouve $k = 2$, donc :

$$x = 2a\cos\varphi,\qquad y = 2b\sin\varphi.$$

Rendant (3) homogène en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ ce qui donne

$$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)(x^2+y^2)^2 - 4(ax\cos\varphi + by\operatorname{oin}\varphi)^2 = 0,$$

et y portant les quantités proportionnelles à $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, on a pour facteur du résultat de l'élimination

$$(x^2+y^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-ya^2b^2).$$

2° $ax\sin\varphi + by\cos\varphi = 0$. Opérant comme précédemment, on obtient :

$$x = \frac{2ab^2\cos 2\varphi\,.\,\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},\qquad y = \frac{-2a^2b\cos 2\varphi\,.\,\sin\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Et pour le facteur d'élimination :

$$(x^2+y^2)^2(a^2y^2+b^2y^2) - 4(a^2x^2-b^2y^2)^2.$$

3° $bx\cos\varphi - ay\sin\varphi$. On a de même :

$$x = \frac{2a(a^2+b^2)\sin^2\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},\qquad y = \frac{2b(a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},$$

et pour facteur d'élimination .

$$(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2) - 4(a^2+b^2)^2x^2y^2.$$

H. l'Huillier.

QUESTION 774

Démontrer que la somme des inverses des distances du centre de gravité d'un triangle aux points où les côtés de ce triangle sont rencontrés par une transversale, issue de ce centre de gravité, est nulle.

(**Mannheim**).

Solution, par **A. Droz-Farny**

Le théorème de M. Mannheim est un cas particulier du théorème de Cotes.

Si sur une transversale issue d'un point O, et qui rencontre les côtés d'un triangle de référence en R_1, R_2, R_3 on construit un point R pour lequel
$$\frac{3}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \frac{1}{OR_3},$$
le lieu de R est une ligne droite, la polaire trilinéaire de O.

Si O coïncide avec le centre de gravité du triangle, son harmonicale coïncide avec la droite à l'infini, donc $OR = \infty$ et par conséquent
$$\sum \frac{1}{OR_1} = 0.$$
A. Droz-Farny.

Solutions exactes : **Bernès, L'Huillier.**

QUESTION 777

On considère un triangle ABC *et les trois cercles exinscrits de centres* O_A, O_B, O_C. *Le cercle* O_A *touche le côté* BC *en* A', *le cercle* O_B *touche le côté* AC *en* B' *et le cercle* O_C *touche le côté* AB *en* C'.

1° *Les droites* O_AA', O_BB', O_CC' *concourent en un même point* I *qui est le centre du cercle circonscrit au triangle* $O_AO_BO_C$.

2° *L'axe radical des cercles* O_B *et* O_C *passe par le milieu de* BC.

E.-N. Barisien.

Solution, par **A. Droz-Farny**

Si d'un point P, on abaisse des perpendiculaires PA' sur BC, PB' sur AC et PC' sur AB côtés d'un triangle ABC, on sait que les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur les côtés B'C', A'C', A'B' du triangle polaire de P concourent en un point, le conjugué isogonal de P dans le triangle ABC.

Or, les droites AO_A, BO_B, CO_C concourent en un point O, orthocentre du triangle $O_AO_BO_C$ et comme le point O a le triangle ABC comme triangle podaire, les droites O_AA', O_BB', O_CC' concourront en un même point I, le conjugué isogonal de l'orthocentre donc le centre du cercle circonscrit au triangle $O_AO_BO_C$. Le rayon du cercle circonscrit au triangle $O_AO_BO_C$ est le double du rayon R du cercle circonscrit à son triangle d'Euler ABC.

2° Les circonférences O_B et O_C touchent le côté BC en deux points isotomiques ; il en résulte que l'axe radical de ces cercles passe par le milieu de BC ; il est aisé de prouver que le centre radical des trois cercles exinscrits est le centre du cercle inscrit au triangle complémentaire de ABC.

A. Droz-Farny.

Solutions exactes : **L'Huillier, Foucart, Plakhowo, E. Lemoine.**

QUESTION 778

Dans tout trapèze dont les diagonales sont rectangulaires, la somme des carrés des diagonales est équivalente au carré de la somme des deux côtés parallèles. **E.-N. Barisien.**

On sait que dans tout trapèze convexe la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés latéraux augmentée du double rectangle des bases.

Ainsi nous aurons $x^2 + g^2 = b^2 + d^2 + 2ac$, mais $b^2 = BO^2 + CO^2$, $d^2 = DO^2 + AO^2$ en portant ces valeurs dans notre équation nous aurons $x^2 + y^2 = BO^2 + CO^2 + DO^2 + AO^2 + 2ac$ et en groupant le premier carré avec le quatrième nous aurons $BO^2 + AO^2 = a^2$, $CO^2 + DO^2 = C^2$ et nous aurons $x^2 + y^2 = a^2 + c^2 + 2ac(a + c)^2$. C. Q. F. D.

N. Plakhowo.

Solutions exactes : **L'Huillier, Ernest Foucart, J. Goyens.**

QUESTION 780

Solution, par **Ernest Foucart**

Soient ABC *un triangle équilatéral inscrit dans un cercle et* P *un point quelconque de la circonférence de ce cercle. Montrer que les orthocentres des quatre triangles* ABC, PAB, PAC *et* PBC *forment un quadrilatère égal au quadrilatère* PABC. **E.-N. Barisien.**

L'orthocentre H_1 de PBC est tel que $PH_1 = AP$, autrement dit HH_1 est équipollent à AP. En raisonnant d'une façon analogue on voit que les orthocentres des triangles PBC, PCA, PAB s'obtiennent en menant par H orthocentre de ABC des droites équipollentes à AP, BP, CP. La proposition énoncée en résulte de suite. On voit que P est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère obtenu.

Solutions exactes : **E. Lemoine, L'Huillier, Rebeix, Plakhowo.**

QUESTION 783

Etant donné un triangle ABC, *on décrit les trois cercles de centres* A, B, C *et de rayons respectifs* p — a, p — b, p — c.

1° *Si* ρ_1 *et* ρ_2 *désignent les rayons des deux cercles tangents aux trois cercles* A, B, C, *et si* r *est le rayon du cercle inscrit à* ABC, *on a*

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{r}.$$

2° *Les tangentes communes à ces cercles, considérés deux à deux, forment divers triangles. Le triangle formé par des tangentes communes extérieures et renfermant les cercles* A, B, C *ou son inférieur, a pour*

expression du rayon de son cercle inscrit

$$\rho = \frac{\sqrt{p} + \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}}{\frac{1}{\sqrt{p-a}} + \frac{1}{\sqrt{p-b}} + \frac{1}{\sqrt{p-c}}}.$$

E.-N. Barisien.

Encore Descartes avait résolu la question : étant donnés trois cercles tangents extérieurement, décrire un cercle, qui leur soit tangent. (Voir *Questions d'algèbre élémentaire*, par Desboves, page 396), et dans cette solution est donnée la formule pour calculer le rayon de ce cercle

$$x_1 = \frac{def}{ef + df + de + 2s}, \quad x_2 = \frac{def}{ef + df + de - 2s},$$

ou def, désignent les rayons de cercles, tangents entre eux deux à deux, et s l'aire du triangle ABC.

$$s = \sqrt{def(d + e + f)}.$$

En décrivant une circonférence tangente aux trois cercles donnés, deux cas peuvent se présenter, ou la circonférence demandée touche extérieurement les trois cercles, ou elle enveloppe les circonférences données. Pour obtenir les deux rayons, nous n'avons qu'à prendre x_1 et x_2 changé de signe ; ainsi si nous posons $x_1 = p_1 - x_2 = p_2$, nous aurons

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{ef + df + de + 2s}{def} + \frac{-ef - df - de + 2s}{def} = \frac{4s}{def}.$$

Mais comme $s = \sqrt{def(d + e + f)}$ en introduisant cette valeur au lieu de s dans notre équation, nous aurons

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{4\sqrt{def(d + e + f)}}{def} = \frac{4\sqrt{d + e + f}}{\sqrt{def}};$$

mais $p - a + p - b + p - c = p$, cela veut dire que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{4\sqrt{p}}{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{4}{r}.$$

M. Barisien a écrit dans Mathésis (sur les triangles formés par les tangentes communes à trois cercles donnés), où il donne une formule en 1891, page 69, pour calculer le rayon du cercle inscrit au triangle formé par les tangentes communes extérieures, et renfermant les cercles ABC en son intérieur, pour le cas où les cercles seront tangents deux à deux

$$p = \frac{\sqrt{R} + \sqrt{R_2} + \sqrt{R_3} + \sqrt{R_1 + R_2 + R_3}}{\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}}},$$

où $R_1R_2R_3$ sont les rayons des trois cercles tangents. En y mettant au lieu de $R_1R_2R_3$ leurs valeurs, nous aurons

$$p = \frac{\sqrt{p} + \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}}{\frac{1}{\sqrt{p-a}} + \frac{1}{\sqrt{p-b}} + \frac{1}{\sqrt{p-c}}}.$$

N. Plakhowo.

QUESTION 784[1]

On considère dans un quadrilatère inscriptible à un cercle, les quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère pris trois à trois.

On sait que les orthocentres de ces quatre triangles sont en ligne droite ; démontrer que cette droite passe par le point de rencontre des diagonales du quadrilatère **E.-N. Barisien.**

Solution, par **A. Droz-Farny**

Soient ABCD, un quadrilatère inscriptible, E, le point de coupe des diagonales, G et H les points d'intersection des paires de côtés opposés. Les circonférences circonscrites aux quatre triangles considérés, se coupent en un point F, situé sur la droite GH et qui n'est rien d'autre que le foyer de la parabole P inscrite dans le quadrilatère. Les pieds π_1, π_2, π_3, π_4 des perpendiculaires abaissées de F sur les côtés du quadrilatère sont en vertu du théorème de Simson sur une droite π la tangente au sommet de la parabole. Soient H_1, H_2, etc., les orthocentres, on sait que les droites FH_1, FH_2, etc., sont divisées en parties égales par π, donc ces points sont sur une droite la directrice de P. D'après un théorème bien connu, E est le pôle de la droite GH par rapport à toutes les coniques inscrites, donc aussi par rapport à P ; or GH passent par F, E doit aussi se trouver sur la polaire de F, donc sur la directrice de P. **A. Droz-Farny.**

Solution exacte : **H. L'Huillier.**

SOLUTION DE LA QUESTION 786

Calculer le côté du triangle équilatéral dont les sommets sont situés sur les circonférences concentriques ayant pour rayons r_1, r_2, r_3.

Le problème est possible, si l'on a $r_3 < r_1 + r_2$). **(Svechnicoff).**

Supposons $r_1 < r_2 < r_3$, et soient : O, le centre commun des circonférences ; A_1, A_2, A_3 les sommets du triangle équilatéral ; α_1, α_2, α_3 les angles $\widehat{A_2OA_3}$, $\widehat{A_1OA_3}$, $\widehat{A_1OA_2}$; x le côté du triangle. Chacun des triangles OA_1A_2, OA_1A_3, OA_2A_3 donne une des relations

(1) $$x^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha_3$$

(2) $$x^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2r_1r_3 \cos \alpha_2$$

(3) $$x^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos \alpha_1$$

Or $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, égalité qui devient en fonction des cosinus de ces angles.

(4) $$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 - 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha^2 \cos \alpha_3 - 1 = 0.$$

En portant les valeurs de $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$ et $\cos \alpha_3$ tirés de (1) (2) et (3), dans (4), on a l'équation

$$- 2(r_2^2 + r_3^2 - x^2)(r_1^2 + r_3^2 - x^2)(r_1^2 + r_2^2 - x^2) - 8r_1^2r_2^2r_3^2$$
$$+ 2r_1^2(r_2^2 + r_3^2 - x^2)^2 + 2r_2^2(r_1^2 + r_3^2 - x^2)^2 + 2r_3^2(r_1^2 + r_2^2 - x^2)^2 = 0.$$

En la développant, le terme constant disparaît, et en divisant par x^2, cette équation devient

$$x^4 - x^2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + (r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 - r_1^2r_2^2 - r_1^2r_3^2 - r_2^2r_3^2) = 0.$$

D'où

$$x = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \pm \sqrt{3(2r_1^2r_2^2 + 2r_2^2r_3^2 + 2r_3^2r_1^2 - r_1^4 - r_2^4 - r_3^4)}}{2}}.$$

Or, le second radical s'écrit

$$\sqrt{3(r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + r_2 - r_3)(r_1 + r_3 - r_2)(r_2 + r_3 - r_1)}.$$

Donc, pour que le triangle équilatéral soit possible, il faut que les trois longueurs r_1, r_2, r_3 puissent former un triangle et que l'on ait

$$r_3 < r_1 + r_2 \quad r_2 < r_1 + r_3 \quad r_1 < r_2 + r_3.$$

Dans ce cas, les deux valeurs de x sont réelles. En effet, pour que la valeur de x correspondant au signe — du radical soit réelle, il faut que

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 > \sqrt{3(2r_1^2r_2^2 + 2r_2^2r_3^2 + 2r_1^2r_3^2 - r_1^4 - r_2^4 - r_3^4)}$$

ou que $$r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 > r_1^2r_2^2 + r_1^2r_3^2 + r_2^2r_3^2$$

inégalité qui est toujours satisfaite.

— Lorsque $r_3 = r_1 + r_2$, les deux valeurs de x se réduisent à une seule

$$x = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{2}}.$$

Lorsque $r_1 = r_2 = r_3$, on trouve les deux valeurs $x = 0$, $x = r_1\sqrt{3}$. Cette dernière est celle du côté du triangle équilatéral inscrit.

(E.-N. Barisien).

Solutions exactes : **Plakhowo, S. Goyens.**

QUESTION 787

Par le point O *situé sur la base du triangle isoscèle* ABC, *on mène la sécante* DE, *qui coupe les cotés* AB *et* BC *en des points* D *et* E. *Des points* D *et* E *on abaisse les perpendiculaires* DX *et* EY *sur la base* AC.

Démontrer que $\dfrac{AO}{OX} + \dfrac{CO}{OY} = 2$. **(Svechnicoff).**

Solution, par **A. Droz-Farny**

Je suppose X dans l'intérieur de AC et Y à l'extérieur ; on a

$$\frac{AO}{OX} = 1 + \frac{AX}{OX} = 1 + \frac{AX}{DX}\operatorname{tg} O$$

$$\frac{CO}{OY} = 1 - \frac{CY}{OY} = 1 - \frac{CY}{EY}\operatorname{tg} O$$

d'où évidemment par addition : $\dfrac{AO}{OX} + \dfrac{CO}{OY} = 2$.

Solutions exactes : **L'Huillier, Ohotnikoff.**

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER), IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTERAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE
Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

309. Mathématiques. — On donne un point A à l'intérieur d'un cercle O. Un angle droit, dont le sommet est en A, pivote autour de A. Les côtés de cet angle rencontrent en B et C la circonférence.

1° Lieu du milieu de BC ;

2° Lieu du point H, pied de la perpendiculaire abaissée de A sur BC ;

3° Lieu du point de rencontre de la bissectrice de l'angle droit avec BC.

309bis. — Résoudre

$$\sin 3x = \sin(a - x).\sin(b - x).\sin(c - x).$$

309ter. — On donne deux droites rectangulaires Ox et Oy. Sur Ox on prend $OA = a$. On considère un triangle rectangle tel qu'un sommet soit en A ; l'angle droit en B sur Oy. Calculer les côtés de ce triangle sachant que sa surface est égale au carré construit sur OA, et que le volume engendré par le triangle tournant autour de Oy et dans un rapport donne m avec la sphère de diamètre OA.

309^{quater}. Epure. — Intersection d'une sphère de rayon 0,15 tangente au plan horizontal avec un prisme triangulaire dont les arêtes ont pour pente 1/2, dont l'une passe par le centre de la sphère. Le côté du triangle a $0^m,10$ de longueur.

310. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant :

$$h = 122^m,82, \qquad a = 1832 \text{ mètres}, \qquad A = 28°31'40''5,$$

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

311. Mathématiques. — On donne un triangle rectangle OAB. Sur l'hypothénuse AB un point M variable. On projette M en P et Q sur OB et OA. On construit les carrés OPRS, OQR'S'. Calculer la position de M pour que la surface

$$MR'S'OSRM = K^2.$$

311 bis. — Rendre calculable par logarithmes :

$$x = 1 + \sin a + \cos c.$$

311 ter. Physique. — Deux lentilles convergentes ayant une distance focale de 1 mètre, sont placées à 1 mètre l'une de l'autre. Quelle position faut-il donner à un objet, pour que le système fournisse :

1° Une image réelle et renversée égale à l'objet.

2° Une image réelle deux fois plus grande.

311 quater. — Calculer :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{75\,280 + \sqrt{6\,982}}}{2\pi}}.$$

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

312. Mathématiques. *a*) (*Obligatoire*). Résoudre :

$$m \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + n \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = r.$$

Résoudre et discuter :

$$mx^2 - (m^2 - 3m + 2) + 2m - 6 = 0$$

quand x varie entre $+1$ et -1.

b) *Au choix.* — 1° Enoncer et démontrer ces théorèmes qui conduisent à la mesure de l'angle dièdre.

2° Enoncer et démontrer les théorèmes qui conduisent à la mesure de l'angle au centre.

3° Volume et surface de la sphère.

312 bis. Physique. *a*) (*Obligatoire*). — Un morceau de bois de densité 0,129 a la forme d'un cône droit, on le fait flotter sur l'eau de manière que son axe soit vertical, en mettant d'abord le sommet en bas et ensuite en haut. On demande la portion de la hauteur qui s'enfonce chaque fois.

b) *Au choix.* — 1° Coefficient de dilatation des gaz.

2° Vapeurs saturantes et non saturantes.

3° Hygrométrie.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

313. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Exprimer que le segment de la droite $2x + 3y - \lambda = 0$ intercepté par les deux autres droites $3x^2 + 5y^2 + 6xy = 0$ est égal à K.

Au choix) 1° Angle de deux droites;

2° Angle de deux plans;

3° Angle d'une droite et d'un plan.

113bis. Physique. — Une lunette astronomique dont l'objectif et l'oculaire ont respectivement pour longueur focale F et f est braquée sur un objet distant de D de l'objectif par un observateur dont la distance de vision $= \delta$. Calculer la distance qui sépare l'objectif de l'oculaire quand l'observateur voit nettement l'image.

Au choix) 1° Pompes et siphons;

2° Machine de Morin;

3° Plan incliné.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

114. Arithmétique. — Un père, en mourant, laisse 100 000 francs à ses trois enfants, âgés respectivement de 12, 15 et 19 ans. Opérer le partage de telle façon que les trois lots, accrus de leurs intérêts simples à 5 %, constituent trois sommes égales à la majorité des jeunes gens.

114bis. — Calculer : $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{75\,280}{3\,218}}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

115. Arithmétique. — 1° Trouver un nombre entier qui soit supérieur de 20 au carré qui le précède et qui soit inférieur de 5 au carré qui le suit.

2° Une montre marque 6 heures.

Quelle est la première heure à laquelle la distance de la grande aiguille au chiffre XII du cadran sera égale à la distance de la petite aiguille au chiffre VI du cadran.

Le résultat sera exprimé à une demi-seconde près.

116. Algèbre. — Effectuer la division de :

$$(x^6 - 64a^6) \quad \text{par} \quad (x - 2a).$$

Montrer, d'après l'examen du quotient obtenu, que $\frac{x^6 - 64a^6}{x - 2a}$ est la somme des termes d'une progréssion géométrique dont on demande de trouver *la rasion, le premier terme* et le *nombre des termes.*

117. Calcul logarithmique. — Calculer l'expression :

$$x = \sqrt[3]{\frac{1324{,}5^3 \times \sqrt[5]{0{,}0001} \times \sqrt[3]{13{,}52}}{\sqrt[7]{0{,}1172} \times 83125^2}}.$$

Chaque candidat calculera cette expression avec l'approximation que comporte la table dont il se sert.

Il sera tenu compte de la bonne disposition et de l'ordre des calculs.

118. Géométrie. — Construire un triangle connaissant le rayon du cercle inscrit, un angle et une des hauteurs non issues du sommet de l'angle donné.

Discussion.

119. Composition française. — De l'utilité des colonies pour une puissance telle que la France. Quelques mots sur l'expansion coloniale française depuis la guerre de 1870.

DEUXIÈME & TROISIÈME PARTIE

QUESTION 788

Par les sommets A et A' de l'ellipse γ, on mène les droites AX et A'X' perpendiculaires à l'axe focal. Par un point M de γ on mène la tangente à cette courbe jusqu'à sa rencontre avec les droites AX et AX' en des points B et B'. De ces points, on élève des perpendiculaires à la tangente. Soient X et X' les points d'intersection de ces perpendiculaires avec l'axe focal. Démontrer $\frac{1}{AX} - \frac{1}{A'X'} = \pm \frac{2}{p}$ si l'on désigne par p le demi-paramètre de l'ellipse.

Svechnicoff.

Solution, par **A. Droz-Farny**

La tangente coupe l'axe focal en U du côté de A' par exemple. Comme AX — A'X' = C² on pourra poser AX = $b\alpha$ et A'X' $= \frac{b}{\alpha}$, de là :

$$\frac{AU}{AX} = \frac{A'U}{A'X'} = \frac{2a}{AX - A'X'}, \quad AU = \frac{2a\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \quad \text{et} \quad A'U = \frac{2a}{\alpha^2 - 1}.$$

Puis $AX = \frac{\overline{AX}^2}{AU} = \frac{b^2(\alpha^2 - 1)}{2a}$, $\quad A'X' = \frac{\overline{A'X'}^2}{A'U} = \frac{b^2(\alpha^2 - 1)}{2a\alpha^2}$,

donc $$\frac{1}{A'X'} - \frac{1}{AX} = \frac{2a}{b^2} = \frac{2}{\frac{b^2}{a}} = \frac{2}{p}.$$

QUESTION 790

Deux circonférences Δ, Δ' *se coupent aux points* A, B; *la tangente à* Δ *en* A, *coupe* Δ' *en* C; *la tangente à* Δ', *en ce même point* A, *coupe* Δ *en* D. *Soit* D′ *le symétrique de* D *par rapport à* A. *Démontrer que la circonférence* CAD′ *a son centre sur la perpendiculaire élevée en* A, *à* AB.

(G. L.).

Solution, par **A. Droz-Farny**

Soient O et O′ les centres respectifs de Δ et Δ', δ le point milieu de AD′ et γ le point milieu de AC. Les perpendiculaires élevées en δ sur AD′ et en γ sur AC se croisent en P centre de la circonférence circonscrite au triangle CAD′. OA prolongé rencontre Pδ en un point O″ symétrique de O par rapport à A. Les deux droites OO″ et γO′P perpendiculaires sur AC sont parallèles, de même les droites O′A et PO″γ sont parallèles. PO′AO′ est donc un parallélogramme et par conséquent PO′ = O″A = AO, donc PAOO′ est aussi un parallélogramme et PY étant parallèle à OO′ est bien perpendiculaire à AB.

Remarque. — I. Le rayon de la circonférence circonscrite au triangle CAD′ est égal à la distance OO′ des centres des circonférences Δ et Δ'.

II. Les trois droites DB, CD′ et O′A se croisent en un même point.

Solutions exactes : **L'Huillier, Foucart.**

QUESTION 791

On considère un triangle ABC ; *soient* G *le point de Gergonne correspondant au cercle inscrit*; G_a, G_b, G_c *ceux des cercles ex-inscrits*. 1° *La droite* GG_a *coupe* BC *en* A′ : *démontrer que* AA′ *et les droites analogues* BB′, CC′ *concourent au point réciproque du centre du cercle* ~~*ana-*~~ *inscrit*. 2°. *La droite* G_bG_c *rencontre* BC *en* A″; *le point* A″ *et les points logues* B″, C″ *sont en ligne droite*. (G. L.).

Solution, par **A. Droz-Farny**

La droite GG_a a pour équation en coordonnées barycentriques

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \operatorname{tg}\frac{B}{2} & \operatorname{tg}\frac{C}{2} \\ -\operatorname{tg}\frac{A}{2} & \operatorname{tg}\frac{B}{2} & \operatorname{tg}\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

En faisant dans cette équation $\alpha = 0$ on obtiendra le rapport de partage relatif au point A′ sur BC et par conséquent l'équation de la droite AA′ sous la forme

$$\frac{\beta}{\frac{1}{\sin B}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\sin C}}.$$

Cette droite passe visiblement par le réciproque du centre du cercle inscrit déterminé par les coordonnées $\alpha \sin A = \beta = \gamma \sin C$.

2) La droite G_bG_c aura pour équation :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \operatorname{tg}\frac{A}{2} & -\operatorname{tg}\frac{B}{2} & \operatorname{tg}\frac{C}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \operatorname{tg}\frac{B}{2} & -\operatorname{tg}\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $\alpha = 0$ on obtiendra le rapport de partage relatif au point A' sur BC sous la forme $\beta \sin B + \gamma \sin C = 0$.

Il en résulte que les points A'', B'', C'' sont sur la droite

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0,$$

la droite harmoniquement conjuguée du réciproque du centre du cercle inscrit.

Solution exacte : **L'Huillier.**

QUESTION 792

On considère, sur une parabole P, *un point* A *tel que la normale* Δ, *en ce point, soit inclinée de* 45° *sur l'axe de* P *;* Δ *coupe* P *en un second point* B. *Soit* M *un point pris arbitrairement sur* Δ. 1° *La circonférence décrite sur* AM *comme diamètre coupe la parabole, abstraction faite de* A, *en deux points* C, D *situés sur une parallèle à* Δ.

2° *La droite* CD *touche la circonférence décrite sur* MB *comme diamètre.*

G. L.

Solution, par **A. Droz-Farny**

Le point A est évidemment sur l'ordonnée du foyer de P. La tangente et la normale en ce point sont toutes deux inclinées de 45° sur l'axe.

On sait que si 4 points d'une conique appartiennent à une circonférence, deux côtés de ce quadrilatère sont isoscéliens par rapport aux axes. Les points A, A, C, D appartenant à la parabole et à la circonférence AM, la tangente en A et la corde CD forment en sens contraire avec l'axe de P des angles égaux donc de 45° et par conséquent CD est parallèle à la normale Δ.

2) Soient O le milieu de AM, L celui de CD et N celui de AB. Le quadrilatère inscrit ACDM ayant deux de ces côtés parallèles, la droite LO est perpendiculaire sur CD et sur AM ; le diamètre LN étant parallèle à l'axe de P il en résulte que le triangle LON est isoscèle rectangle et que $LO = ON$. On a donc :

$$\begin{aligned} 2(ON) &= 2(AN - AO) \\ &= AB - AM \\ &= MA \end{aligned}$$

Donc

$$OL = \frac{MB}{2}.$$

La droite CD touche donc la circonférence décrite sur MB comme diamètre.

Solutions exactes : **L'Huillier, Foucart.**

QUESTION 793

Solution, par **M. B. Boutin**

D'un point O pris arbitrairement sur le plan d'un triangle donné, on mène une parallèle à l'un des côtés de ce triangle et l'on prend l'harmonique conjugué de O par rapport au point où elle coupe les deux autres côtés. Les points obtenus ainsi sur les parallèles menées de O aux trois côtés du triangle appartiennent à une même droite.

(**Mannheim**).

Soient, en coordonnées barycentriques, α', β', γ', les coordonnées de O; O_a, O_b, O_c, les conjugués harmoniques de O, situés respectivement sur les parallèles menées par O à BC, CA, AB.

Les coordonnées de O_a, O_b, O_c sont :

$$(O_a) \qquad \alpha'(\beta' - \gamma'), \quad \beta'(\beta' + \gamma'), \quad -\gamma'(\beta' + \gamma'),$$
$$(O_b) \qquad -\alpha'(\alpha' + \gamma'), \quad \beta'(\gamma' - \alpha'), \quad \gamma'(\alpha' + \gamma'),$$
$$(O_c) \qquad \alpha'(\alpha' + \beta'), \quad -\beta'(\alpha' + \beta'), \quad \gamma'(\alpha' - \beta').$$

On constate aisément que le déterminant de ces coordonnées est nulle; donc les 3 points sont en ligne droite.

L'équation de cette droite est d'ailleurs :

$$\frac{\alpha}{\alpha'}(\beta' + \gamma') + \frac{\beta}{\beta'}(\alpha' + \gamma') + \frac{\gamma}{\gamma'}(\alpha' + \beta') = 0,$$

cette droite est parallèle à la droite harmoniquement associée au point O.

Solutions exactes : **Foucart, L'Huillier.**

Soit N un nombre impair égal à la somme de deux carrés et composé de n facteurs premiers, égaux ou inégaux.

Le carré de N est :

1° *La somme de deux carrés (propriété évidente et connue)*;

2° *La somme de trois carrés ;*

3° *La somme de quatre carrés ;*

4° *La somme de* (n + 1) *carrés.* (**E. Catalan**).

On sait que si N est un nombre composé égal à la somme de deux carrés, alors tout diviseur de cette somme de deux carrés est lui-même une somme de deux carrés (p. 483. Tex. d'Arith. Fitz-Patrich et Chumet).

Ainsi $N = abcd... n = A^2 + B^2$, chaque facteur impair qui constitue le nombre N est égal à la somme de deux carrés.

$$a = \alpha_2^2 + \beta^2, \quad b = \alpha_1^2 + \beta_1^2, \quad c = \alpha_2^2 + \beta_2^2.$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad n = \alpha_n^2 + \beta_n^2.$$

Posons premièrement N composé de deux facteurs égaux, et égal à la somme de deux carrés $N = A^2 + B^2$.

Alors son carré

$$N^2 = (A^2 + B^2)^2 = A^4 + 2A^2B^2 + B^4 = A^2(A^2 + B^2) + A^2B^2 + B^4$$

et comme N est composé de deux facteurs égaux, ainsi $A^2 + B^2$ est un carré parfait, et le produit de $A^2(A^2 + B^2)$ est aussi un carré parfait. Ainsi N^2 est une somme de trois carrés, et si N^2 composé de deux facteurs égaux, égal la somme de trois carrés. Si nous introduisons un facteur, égal à

chacun des premiers, le nombre N sera composé de trois facteurs égaux, et le troisième facteur, étant supposé égal à la somme de deux carrés, son carré sera aussi le somme de deux carrés.

Ainsi $N^2 = (ab)^2 = A^2 + B^2 + C^2$,

supposons $N = abc$

et $c = \alpha_2^2 + \beta_2^2$,

alors $N^2 = (abc)^2 = c^2A^2 + c^2B^2 + \alpha_2^2C^2 + \beta_2^2C^2 = A^2 + B^2 + B^2 + D^2$.

Ainsi quand N est composé de trois facteurs égaux, son carré est composé d'une somme de quatre carrés, ainsi de suite : si N est composé de n facteurs égaux, son carré sera cômposé d'une somme de $n + 1$ carrés. Supposons en second lieu, N composé de deux facteurs inégaux, et tels qu'il n'y ait pas de facteur 5, alors le carré de N doit être formé d'une somme de deux carrés, dont l'un au moins doit être divisible par 5 (page 293 du *Bullet. de Mathém. Élément.*, 1896-97).

Si, par exemple, nous avons 30, et $N^2 = 30^2 + 9^2$, alors nous n'avons qu'à diviser 30 par 5, ce qui donne 6, et pouvons écrire

$$N^2 = 5^2, \quad 6^2 + 9^2 = 6^2(3^2 + 4^2) + 3^2, \quad 6^2 + 4^2, \quad 6^2 + 9^2.$$

Ainsi, le nombre N^2 composé de deux facteurs inégaux, sera une somme de trois carrés ; et si N est composé de n facteurs inégaux, son carré sera composé de $n + 1$ carrés. Mais nous avons exclu le facteur 5 ; s'il figure dans le produit, alors $N^2 = 25(A^2) + 25(B^2) + 3C^2 + 4C^2$.

Ainsi, nous voyons que le facteur 5 ne modifie en rien la règle, et si N est composé de trois facteurs inégaux, son carré sera une somme de quatre carrés, $N^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$.

Mais le produit de deux facteurs peut être présenté sous une somme de cinq carrés. En posant $N = 24$ nous trouvons

$$N^2 = 204^2 + 85^2 = 204^2 + 84^2 + 13^2 = 204^2 + 84^2 + 12^2 + 5^2 = 204^2 + 84^2 + 12^2 + 4^2 + 3^2.$$

N. Plakhowo.

QUESTION 769

Construire un triangle ABC, *connaissant le rayon* R *du cercle circonscrit, la longueur du côté* a *et la distance de l'orthocentre* H *au milieu de ce côté.*

Solution. — Soit ABC le triangle, H l'orthocentre, M le milieu du côté $BC = a$.

Dans le triangle BHC on connait $BC = a$, la médiane MH et l'angle $BHC = 180° - A$ (l'angle A est connu puisque la corde BC et R sont connus). De là la construction.

Dans la circonférence R inscrivons une corde $BC = a$. Sur BC comme corde décrivons le segment capable de $180° - A$, c'est-à-dire la circonférence R′ symétrique de R par rapport à BC. Du point M comme centre avec MH comme rayon, décrivons un arc de cercle qui coupe R′ en H. HI perpendiculaire sur BC rencontre la circonférence en A.

L. Goyens.

QUESTION 773

1° *Lorsque deux circonférences* Δ, Δ' *de centres* O, O' *se coupent en* A. *orthogonalement* ; S *étant le centre de similitude, l'un des angles* OAS *est de* 45°, *l'autre* O'AS *est de* 135°.

En d'autres termes, si l'on préfère cette forme donnée à l'énoncé :

Si deux circonférences se coupent orthogonalement, la corde commune est vue du centre de l'une des circonférences et du centre de similitude sous des angles complémentaires.

2° *La polaire de* S *par rapport à l'une des circonférences, à* Δ *par exemple, coupe les droites* AO, AO' *en des points* P, P'. *Démontrer que* AP *est égal au rayon de* Δ' *et que* AP' *est égal au rayon de* Δ. **(G. L.)**

Solution, par **A. Droz-Farny**

La droite SA coupe Δ eu α et Δ' en α' ; S étant le centre de similitude directe par exemple, on a : Oα parallèle à O'A donc Oα perpendiculaire à OA et, par conséquent, angle OAα = OαA = 45° ; de même, O'AS = 90 + 45 = 135°.

2° Les tangentes en α et A au cercle Δ se croisent en P' sur la polaire de S ; comme P'A = P'α la figure P'AOα est un carré, donc P'A = OA.

Dans le triangle PO'P', O est l'orthocentre ; il en résulte O'A.AP' = PA.OA ; or, OA = P'A, donc PA = O'A.

Remarque. — On peut signaler les propriétés suivantes :

Soit β le pied de la polaire considérée ; le cercle O' et le cercle sur Sβ comme diamètre ont pour axe radical le diamètre de O perpendiculaire à OS.

Le cercle O étant orthogonal aux deux autres, passe par les points limites du faisceau qu'ils déterminent.

Les tangentes en α et α' sont orthogonales ; chacune d'elles = R + R'.

QUESTION 776

Soient : M, *un point d'une ellipse, de centre* O ; P, *la projection de* M *sur le grand axe* ; N *et* T *les points où la normale et la tangente en* M *rencontrent respectivement le grand axe. On prend sur le grand axe* NQ = OP *et on trace le cercle de diamètre* QT. *Montrer que la tangente menée de* N *à ce cercle a pour longueur le demi-diamètre conjugué à* OM. **(E.-N. Barisien).**

Solution, par **A. Droz-Farny**

Soient : t la longueur de la tangente ; a' le demi-diamètre conjugué à OM = b' et d la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en M.

On a : $t^2 = \mathrm{NQ.NT}.$

$$= \mathrm{OP.NT} = \frac{a^2\,\mathrm{NT}}{\mathrm{OT}} = \frac{a^2.\mathrm{MN}}{d}.$$

Or, d'après un théorème connu en représentant par R le point de coupe

du petit axe et de la normale on a : $\frac{MN}{MR} = \frac{b^2}{a^2}$ et $MN.MR = a_1^2$, de là $\overline{MN}^2 = \frac{b^2a_1^2}{a^2}$, $MN = \frac{ba_1}{a} = \frac{aba_1}{a^2} = \frac{a_1^2d}{a^2}$, portons cette valeur dans la relation précédente, elle deviendra : $t^2 = a_1^2$, $t = a_1$.

A. Droz-Farny.

QUESTION 794

Solution, par **Ernest Foucart**

On donne une circonférence de cercle et l'un de ses diamètres. D'un point M *de la circonférence on abaisse sur ce diamètre la perpendiculaire* MP, *que l'on partage en* M' *dans un rapport donné. On mène la droite* M'T, *qui joint le point* M' *au point* T *où la tangente en* M *au cercle rencontre le diamètre donné. De l'un des points où* M'T *coupe le cercle on lui élève une perpendiculaire.*

Cette droite coupe le diamètre en un point F *qui est le même, quel que soit* M *sur le cercle : c'est ce qu'on propose de démontrer sans considérer l'ellipse, lieu de* M', *et sans utiliser les propriétés correspondant à cette considération.* **(Mannheim).**

Soit ω l'angle polaire de M ; R le point où M'T coupe le cercle ; R_1 la projection de O sur M'T.

On a $MP = R\sin\omega$, $M'P = kR\sin\omega$, $OT = \frac{R}{\cos\omega}$, $PT = R\frac{\sin^2\omega}{\cos^2\omega}$.

Des triangles semblables qui se voient sur la figure donnent

$$(1) \qquad \frac{OF}{RR_1} = \frac{M'P}{PT} = \frac{\sqrt{\overline{PT}^2 + \overline{M'P}^2}}{PT} = \frac{\sqrt{\sin^2\omega(1-k^2)+k^2}}{\sin\omega}.$$

D'autres triangles semblables donnent $\frac{OR_1}{M'P} = \frac{OT}{M'T}$.

D'où $$\overline{RR_1}^2 = R^2 - \overline{M'P}^2\frac{\overline{M'T}^2}{\overline{OT}^2}.$$

Et remplaçant par les valeurs trouvées

$$(2) \qquad RR_1 = \frac{R\sin\omega\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{\sin^2\omega(1-k^2)+k^2}}.$$

Comparant (1) et (2), il vient $OF = R\sqrt{1-k^2}$ Const.

SOLUTION DE LA QUESTION 796

Enoncé

Etant donné un triangle AOB *rectangle en* O ; *on prolonge* OA *au delà du point* A *de la longueur* AA' = OB, *et on prolonge* OB *au-delà du point* B *de la longueur* BB' = OA.

Montrer que l'hypothénuse AB *est vue du point milieu de* A'B' *sous un angle droit,* **(E.-N. Barisien).**

Solution

Soit O′ le milieu de A′B′; abaissons sur OA′ et OB′ les perpendiculaires O′M, O′N; on a $OM = ON$.

Le triangle A′OB′ étant isoscèle, on a aussi

$$AM = BN,$$

d'où

$$\widehat{AO'M} = \widehat{BO'N}.$$

On aura donc $\widehat{AO'B} = \widehat{MO'N} = 90°$.

Remarques. — 1° On voit immédiatement que

$$O'B = O'A.$$

2° On peut énoncer la proposition de la manière suivante :

« Si dans un triangle isoscèle A′OB′ rectangle en O, on prend à partir de « O sur le côté OA′ une longueur OA et sur le côté B′O, à partir de B′, une « autre longueur B′B égale à OA, O′ étant le milieu de l'hypoténuse A′B′, « l'angle AO′B est droit et on a O′A = O′B. » **J.-F. d'Avillez.**

AUTRE SOLUTION DE LA QUESTION 796

Si l'on pose, O′ étant le milieu de A′B′,

$$OA = b \quad \text{et} \quad OB = a,$$
$$O'A = x \quad \text{et} \quad O'B = y,$$

on a, dans le triangle OO′A′, d'après le théorème de Stewart,

$$x^2(a + b) = \frac{(a + b)^2}{2} \cdot b + \frac{(a + b)^2}{2} \cdot a - ab(a + b)$$

ou

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

On a de même

$$y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

donc

$$x = y,$$

et

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Or

$$a^2 + b^2 = \overline{AB}^2,$$

donc, AB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isoscèle dont les côtés sont O′A, O′A, ce qui démontre le théorème. **J.-F. d'Avillez.**

SOLUTION DE LA QUESTION 797

Enoncé

Dans tout triangle ACB, *rectangle en* C, *on a les relations suivantes entre les rayons des quatre cercles tritangents au triangle* ACB.

(*Les lettres* a, b, c, p *ont leur signification habituelle*)

$$r_a + r_b = c, \quad r_c = p\ (^*), \quad r + r_c = a + b,$$

$$r + r_a + r_b + r_c = 2p, \quad r + r_a + r_b = r_c, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}.$$

(E.-N. Barisien).

(*) L'énoncé de la page 72 porte $2r_c = p$, mais on doit avoir $r_c = p$.

Solution

Dans tout triangle, on a $r_a + r_b = 4R\cos^2\frac{C}{2}$,

or, dans le cas considéré $R = \frac{c}{2}$, $\hat{C} = 90^\circ$,

d'où l'on déduit la première relation.

On sait aussi que $r_c = p \operatorname{tang} \frac{C}{2}$,

donc $r_c = p$.

La troisième relation se déduit de la formule connue

$$S = \frac{(a+b)rr_c}{r + r_c},$$

où S est l'aire du triangle, car on en tire

$$r + r_c = \frac{(a+b)rr_c}{pr} = a + b.$$

En ajoutant la première et la troisième relation on obtient la quatrième, et si l'on retranche de celle-ci la seconde on a la cinquième.

La sixième se déduit des formules connues

$$r = \frac{S}{p} \quad \text{et} \quad r_c = \frac{S}{p - c}.$$

On a, en effet $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{2p - c}{S} = \frac{a + b}{S}$

et $S = \frac{ab}{2}$,

donc $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$.

Remarques. — La cinquième relation peut aussi se déduire de la formule connue $k_c = \frac{r + r_a + r_b - r_c}{4}$,

k_c désignant la distance du centre du cercle circonscrit au côté c; dans le triangle ACB, on a $k_c = 0$, d'où l'on obtient immédiatement la relation cherchée.

On peut aussi trouver d'autres relations qui se vérifient dans le triangle ACB.

J.-F. d'Avillez.

QUESTION PROPOSÉE N° 799

On donne deux cercles (C), (C'), *qui se coupent en* o. *Par ce point, on mene une transversale arbitraire qui rencontre* (C) *en* a *et* (C') *en* a'. *Du point* a *on mène la droite* at *parallèlement au rayon de* (C'), *qui passe par* a' : *démontrer que, lorsque la transversale tourne autour de* o, *la droite* at *reste tangente à une circonférence.* (**Mannheim**).

Solution, par **Alfredo Schiappa Monteiro.**

Menons dans le cercle (C) le rayon C'o, qui coupe at au point t; et soient p_0 et p les pieds des perpendiculaires Cp_0, Cp abaissées du centre C du cercle (C) sur Co et at.

Les triangles $oC'a'$ et ota seront toujours isoscèles et semblables, et, par suite, lorsque la transversale $a'oa$ pivotera autour du point fixe o, on aura constamment $Cp = Cp_0 =$ const.

Donc, *la parallèle* at *au rayon* C'a' *de* (C') *restera toujours équidistant de* C, *et, par conséquent, enveloppera une circonférence concentrique à* (C) *et de rayon égal à la perpendiculaire* Cp_0 *à* Co Q. e. d.

Lisboa, 1897, **Alfredo Schiappa Monteiro.**

QUESTION PROPOSÉE N° 800

On donne une série de cercles qui se touchent en a, *et une autre qui se touchent en* b. *Démontrer que le lieu des points de contact de ces cercles est formé de deux circonférences de cercles qui se rencontrent à angles droits en* a *et* b. (**Mannheim**).

Solution, par **Alfredo Schiappa Monteiro.**

Soient ca et cb les droites sur lesquelles se trouvent les centres α_1, α'_1..; et β_1, β'_1,... ; des deux suites de cercles considérés (α_1), (α'_1),... : et (β), (β'_1),.

Considérons d'abord deux de ces cercles (α_1), (β_1) qui se touchent en x. Soit I le centre du cercle inscrit (I dans le triangle $c\alpha_1\beta_1$, qui touche en T, θ_1, θ_2 les côtés $a\alpha_1$, $c\beta_1$, $\alpha_1\beta_1$; et puisque ce centre se doit trouver équidistant de a, b, x, il sera aussi l'intersection de la bissectrice fixe Ic de ce triangle et de la perpendiculaire Im élevée au milieu du segment ab ; d'où il résulte que *ce cercle inscrit* (I) *sera invariable et aura pour équation* IT = r Ainsi lorsque la droite $\alpha_1\beta_1$ roulera sur cette circonférence fixe (I) leurs points d'intersection avec les droites ac, bc seront les centres de couples de cercles de ces deux suites, dont le point de contact appartient au lieu demandé.

Or, les côtés ax, bx de l'angle axb étant évidemment parallèles aux côtés $T\theta_2$, $\theta_1\theta_2$ de l'angle $T\theta_2\theta_1$ inscrit dans le cercle (I), et dirigés dans le même sens, ces angles seront égaux ; mais ce dernier angle est constamment égal à l'angle $T\theta_1c$ ou $cT\theta_1$ ou bien à son supplément, donc il en est de même du premier angle, et, par suite, *le lieu géométrique du point* x *dans ce cas sera la circonférence* (abx) *de rayon* Ia = Ib = r_1, *concentrique à la circonférence* (I), *et qui donne le segment capable de cet angle* $cT\theta_1$ *ou de son supplément par rapport à* ab.

Maintenant considérant encore le cercle (α_1) et l'autre (β'_1) de centre β_1' appartenant à l'autre suite, qui le touche en y. Soit I' le centre du cercle inscrit (I') dans le triangle $c\alpha_1\beta'_1$, qui touche en T_1, θ'_1, θ'_2 les côtés $c\alpha_1$, $c\beta'_1$, $\alpha_1\beta'_1$. Comme ce centre doit aussi être équidistant de a, b, y sera de même l'intersection de la bissectrice fixe I'c de ce triangle avec la droite ImI', d'où il résulte que ce cercle sera invariable et aura pour rayon $IT_1 = r'_1$. Donc, lorsque la droite $\alpha_1\beta'_1$ roulera sur cette circonférence fixe (I'), leurs points d'intersection avec les droites ac, bc seront les centres de couples de cercles de ces deux suites, dont les points de contact appartiennent de même au lieu demandé.

D'une manière analogue à la précédente on voit que, dans ce cas, l'angle

ayb sera constamment égal à l'angle $T_1\theta'_1$ ou à son supplément, d'où il résulte que *le lieu géométrique du point* y *sera la circonférence* (aby) *de rayon* l'a = I'b = r'_1, *concentrique à la circonférence* (I), *et qui donne le segment capable de cet angle* $cT_1\theta'_1$ *ou de son supplément par rapport à* ab.

Comme on le voit, les angles $cT\theta_1$ et $cT_1\theta'_1$ ou leurs suppléments, et, par suite, les angles *abx* et *aby* étant complémentaires il s'ensuit que ces deux cercles (*abx*) et (*aby*), qui représentent le lieu géométrique demandé, se coupent orthogonalement aux points *a* et *b*; c'est-à-dire qu'on aura

$$\angle Iba = bI'I,$$

ou on voit que les droites $T\theta_1$ et $T_1\theta'_1$ s'entrecoupent perpendiculairement et que, par suite, il en sera de même des rayons *Ib*, *I'b*.

Cas particuliers. — Bien que dans cette question on ne demande la discussion ni de présenter les différents cas particuliers, qui peuvent avoir lieu; nous allons, en tout cas, dire, en passant, quelques mots à ce sujet.

Comme on sait, dans ces deux suites de cercles, qui se touchent en *a* et *b*, on a aussi à considérer les tangentes à ces cercles en ces points, lesquelles avec leurs parallèles à l'infini déterminent les deux *cercles doubles opérantiques* ou de rayons infinis de ces deux suites. C'est donc à partir de ces cercles que les centres des autres cercles générateurs des deux cercles fixes (*abx*), (*aby*), de la suite correspondante, qui étaient d'un certain côté du point de contact de cette suite de cercles passent à des côtés opposés.

Dans le cas où l'angle des droites *ca* et *cb*, lieux des centres des cercles des deux suites, est droit, les cercles (*abx*), (*aby*), qui composent le lieu demandé, seront évidemment égaux.

Si l'on imagine que les droites *ac* et *bc*, après avoir tourné autour de *a* et *b*, deviennent parallèles, les points *c*, I' se trouveront rejetés à l'infini, et par suite l'un des cercles (*abx*) aura pour diamètre le segment *ab*, et l'autre cercle (*aby*) deviendra opérantique, c'est-à-dire se réduira à la droite *ab* et à sa parallèle à l'infini.

Dans le cas où les droites *ac* et *bc* coïncident seulement en direction, le lieu se composera des points *a*, *b* et de la droite *ab*.

Si dans ce dernier cas les points *a*, *b* coïncident en un seul et même point celui-ci sera le lieu demandé.

Lorsque ces points coïncideront sans qu'il en soit de même des droites *ac*, *bc* il n'y aura pas de solution.

Lisboa, 1897. **Alfredo Schiappa Monteiro.**

QUESTION PROPOSÉE N° 801

Trouver l'aire de l'ennéagone ayant pour sommets les neuf points remarquables du cercle d'Euler. (A > B > C).

(Scholasstips, Queen's college, Cambridge, 1894).

Pour trouver l'aire de l'ennéagone déterminée par les neuf points remarquables du cercle d'Euler, considérons la figure 449, p. 302, des exercices de géométrie p. F. J.; il suffit de soustraire de l'aire du triangle ABC, les

six aires des triangles AJL, ALG, BDJ, BJE, CSK, et CSF. L'aire de l'ennéagone sera S — AJL — ALG — BDJ — BJE — CSK — CSF. Mais l'aire de AjL est égale à $\frac{\text{Aj AL}.\sin \text{LAj}}{2}$, mais Aj = $c \cos A$, AL = R cos A, et l'angle LAj = 90 — C ; nous aurons $\frac{Rc \cos^2 A \cos C}{2}$.

L'aire A'LG sera égale $\frac{\text{AL.AG}.\sin \text{GAL}}{2}$; et l'angle GAL = 90 — B, où $\frac{Rb \cos^2 A.\cos B}{2}$, de la même manière nous aurons les aires des quatre autres triangles.

$$\Delta\, BKJ = \frac{Bc \cos B \cos A}{4}, \quad \Delta\, DJE = \frac{Ra \cos B \cos C}{4},$$

$$\Delta\, CKS = \frac{Rb \cos^2 C \cos B}{2}; \quad \Delta\, CSF = \frac{Rb \cos C \cos A}{4}.$$

Prenons pour S la formule $S = \frac{R}{2}(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$, mais $a = 2 R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. En substituant ces valeurs au lieu de a, b, c, nous aurons : $S = \frac{R^2}{2}(2 \cos A \sin A + 2 \cos B \sin B + 2 \cos C \sin C) = \frac{R^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$. Ajoutons les six aires ensemble, et après avoir remplacé a, b, c par leurs valeurs, prenons $\frac{R^2}{2}$ comme diviseur commun, nous aurons :

$$\frac{R^2}{2}\Big[2 \cos^2 A \cos C \sin C + 2 \cos^2 A, \cos B \sin B + 2 \cos^2 C \cos B \sin B$$
$$+ \frac{1}{2}(\cos A \cos B \sin C + \cos B \cos C \sin A + \cos C \cos A \sin B)\Big]$$
$$= \frac{R^2}{2}\Big[\cos A \sin 2C + \cos^2 A \sin 2B + \cos^2 C \sin 2B + \frac{1}{2}(\cos B \cos A \sin C$$
$$+ \cos C \cos A \sin B + \cos B \cos C \sin A)\Big] = \frac{R^2}{4}\Big[2 \cos A \sin_2 C + 2 \cos^2 A$$
$$+ \sin 2B + 2 \cos^2 C \sin 2B + \frac{\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C}{4} + \frac{\sin 2C + \sin 2A - \sin 2B}{4}$$
$$+ \frac{\sin 2C + \sin 2B - \sin 2A}{4}\Big] = \frac{R^2}{4}\Big(2 \cos^2 A \sin 2C + 2 \cos^2 A \sin 2B$$
$$+ 2 \cos^2 C \sin 2B = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{4}\Big).$$

Retranchons maintenant cette dernière expression de l'expression de l'aire du triangle, nous aurons :

$$\frac{R^2}{4}\Big(2 \sin 2A + 2 \sin 2B + 2 \sin 2C - 2 \cos^2 A \sin 2C - 2 \cos^2 A \sin 2B$$
$$- 2 \cos^2 C \sin 2B - \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{4}\Big) = \frac{R^2}{4}\Big[\frac{7}{4}(\sin 2B + \sin 2A$$
$$+ \sin 2C) - 2 \cos^2 A \sin 2C - 2 \cos^2 A \sin 2B - 2 \cos^2 C \sin 2B\Big]$$
$$= S^2\Big[\frac{7}{4}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) - 2\big[\cos^2 A(\sin 2C + \sin 2B) + \cos^2 C \sin 2B\big]\Big],$$

cette expression a l'inconvénient d'être vraie seulement pour un triangle acutangle, mais si nous avons un triangle obtusangle nous pouvons construire un second triangle acutangle ayant le même cercle des neuf points.

Observant la même figure 449, l'angle KHB = 90 — B, et l'angle KAB = C, KAC = B, CHK = 90 — C, l'angle BHK sera supplémentaire à l'angle BHA = 90 + B. Les angles HBA et HCA = H — 90.

Si nous connaissons un côté et deux angles adjacents, nous pourrons toujours calculer les deux autres côtés, et déterminer ainsi un triangle acutangle ayant même cercle des neuf points.

Si l'angle A est plus grand que B, et B plus grand que C, alors les hauteurs des sommets B et C seront plus près du sommet A, et nous aurons la figure 449.

N. Plakhowo.

$(n-1)!\sum_{2}^{n}\frac{1}{n-1}$ *est divisible par* n (*impair*). (*Scholarstips St Iohus Collège Cambridge*, 1893).

Supposons u impair, alors $n-1$ sera pair, et nous aurons :

$$(n-1)!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}\right),$$

en groupant les termes à égale distance des extrêmes, on voit que cette expression peut se mettre sous la forme

$$(n-1)!\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-2}\right)+\dots+\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{n-l}\right)\right]$$

$$=(n-1)!\left[\frac{n}{1(n-1)}+\frac{n}{2(n-2)}+\frac{n}{3(n-3)}+\dots+\frac{n}{l(n-l)}\right],$$

ou encore sous la forme

$$u\left[\frac{(n-1)!}{1(n-1)}+\frac{(n-1)!}{2(n-2)}+\dots+\frac{(n-1)!}{l(n-l)}\right].$$

Chacune des fractions entre crochets est un nombre entier, donc cette somme est u multiple de u impair. Cette question est connue, puisqu'elle est résolue dans les exercices d'arithmétique par Fitz-Patrick et Chevreil, question 224, p. 179.

N. Plakhowo.

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE St-CYR

320. Mathématiques. — Soient AB un diamètre fixe d'un cercle et M un point variable de la circonférence. On prend sur AM, à partir du point M, deux longueurs MC = MC' = MB. Démontrer que chacun des points C et C' décrit une circonférence.

E.-N. Barisien.

321. Epure. — Une sphère d'un rayon de 5 centimètres est tangente au plan horizontal. Un cône dont le sommet S a pour cote 10 centimètres et tel que la projection S soit à 10 centimètres à droite du point de contact, est circonscrit à cette sphère. Une autre sphère a son centre sur l'axe du cône et passe à la fois par le centre de la première sphère et le sommet du cône. On demande de représenter la partie du cône comprise entre le plan horizontal et cette dernière sphère supposée enlevée. Déterminer la tangente en un point de l'intersection.

322. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle, connaissant :

$$A = 30^\circ\, 34'\, 28''\, 6\,;\quad B = 42^\circ\, 26'\, 15''\, 8 \text{ et } h_a = 2724^m,62.$$

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

323. Mathématiques. — Calculer par la méthode des parties aliquotes du temps les intérêts des sommes suivantes :

9245 francs à	4 %	pendant	113	jours ;
8240 »	6 %	»	223	»
412 »	4,50 %	»	85	»
9720 »	3 %	»	109	»
8792 »	5 %	»	173	»
8027 »	6 %	»	43	»

324. — Chasser les radicaux du dénominateur de la fraction :

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}.$$

325. Physique. — Un ballon de 10 litres de capacité con-

tient un mélange d'air sec et de vapeur d'eau, la tension de cette dernière étant de $5^{mm},8$ et la pression totale de 760 millimètres. La température du ballon est de 15 degrés. On demande ce que deviendra la pression du mélange si l'on introduit dans ce ballon une nouvelle quantité d'air sec qui, à 10°, occupait un volume de 4 litres sous la pression de 810 millimètres.

326. Calcul logarithmique. — Calculer :

$$x = \sqrt[5]{4\sqrt{2\sqrt{3}}}$$

avec une approximation de 0,000001.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

327. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Etudier les variations de :

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}.$$

(*Au choix*). — *a*) Énoncer et démontrer les théorèmes qui conduisent à la détermination du volume de la zone sphérique.

b) Enoncer et démontrer les théorèmes qui permettent de déterminer la surface latérale du tronc de cône.

c) Résumer tous les théorèmes relatifs aux angles trièdres.

328. Physique. — Une sphère de 5 centimètres de diamètre chauffée à la température de 300° est plongée dans la cavité d'un bloc de glace et y fait fondre 148 grammes d'eau. On demande de déduire de cette expérience la chaleur spécifique de la sphère.

(*Au choix*). — *a*) Loi du mélange des gaz.

b) Détermination de la densité des corps solides.

c) Des lois de la réflexion de la lumière. Leur conséquence au point de vue de la formation des images dans les miroirs plans.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

329. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Construire la courbe des variations de :

$$y = \frac{x^2 + \lambda x + 1}{x^2 - \lambda x + 1}.$$

Discuter les modifications que subit cette courbe lorsque λ prend diverses valeurs.

(*Au choix*). — *a*) Plus courte distance de deux droites.

b) Plan bissecteur de deux plans.

c) Droite passant par un point donné et s'appuyant sur deux droites données.

330. Physique. — Un corps perd dans l'eau 50 grammes. Il pesait dans l'air 250 grammes. Dans l'acide sulfurique son poids apparent n'est plus que de 125 grammes. On demande quels sont sa densité et son volume. La densité de l'acide sulfurique sera prise égale à 1,8.

(*Au choix*). — *a*) Des lois de l'induction électro-magnétique; leurs applications.

b) De la réfraction et du prisme.

c) Des solénoïdes. Assimilation des aimants aux solénoïdes.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

331. Arithmétique. — Un capital a été placé à raison de 6 % pendant 15 mois. Un autre capital a été placé pendant 23 mois. Le premier capital étant double du second, on demande à quel taux il a fallu placer ce dernier pour que l'intérêt rapporté par lui soit égal à celui du premier capital.

332. — Calculer $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{\dfrac{2}{3\sqrt{7421}}}}.$

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

333. Arithmétique. — On a acheté de l'eau-de-vie au prix de 400 francs l'hectolitre. Dans quelle proportion devra-t-on y ajouter de l'eau pour gagner 0 fr. 80 par litre?

334. Géométrie. — Calculer la surface latérale d'une pyramide ayant pour hauteur $4^{m},695$ dont la base est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de $1^{m},75$ de rayon.

335. Algèbre. — Résoudre le système d'équations :

$$xy + z = 1,$$
$$xy + y = 2,$$
$$yz + x = 3.$$

DEUXIÈME PARTIE

Solutions aux questions proposées

QUESTION 302bis

Résoudre le système :

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 888 \quad (x - y)(x^2 - y^2) = 48.$$

Solution, par **N. Plakhowo.**

La méthode la plus facile pour résoudre le système d'équation, est celle-ci : le système proposé peut être mis sous la forme

$$x^3 + xy(x + y) + y^3 = 888 \quad x^3 - xy(x + y) + y^3 = 48,$$

d'où
$$x^3 + y^3 = \frac{888 + 48}{2} = 444 + 24 = 468.$$

Le cube de x doit être moindre que 468, ainsi en prenant y, dont le cube 343, et en le retranchant de 468, il reste 125, qui est un cube parfait, d'où $x = 7$ et $y = 5$.

Pour résoudre ce système, $(x + y)(x^2 + y^2) = 888$, et la seconde équation, nous pouvons représenter sous la forme $(x - y)^2(x + y) = 48$, divisons la première équation par cette dernière, il vient

$$2x^2 + 2y^2 = 37(x^2 - 2xy + x^2).$$

Posons $y = x\mathrm{T}$, et remplaçons y par sa valeur

$$35x^2 - 74x^2\mathrm{T} + 35x^2\mathrm{T}^2 = 0.$$

Divisant par x^2, on a une équation $35\mathrm{T}^2 - 74\mathrm{T} + 35 = 0$,

d'où
$$\mathrm{T} = \frac{74 + 24}{70}\ \frac{5}{7}, \quad y = \frac{5}{7}x.$$

Portons cette valeur dans la seconde équation, nous aurons

$$\frac{4}{7}x \quad \frac{24}{49}x^2 = 48.$$

Divisant les deux membres par 48, il vient

$$\frac{x^3}{343} = 1, \quad x^3 = 343, \quad \text{ou} \quad x = 7, \quad \text{donc} \quad y = 5.$$

Soit ABC, *un triangle donné dont les côtés sont* a, b, c (a > b > c), S *l'aire,* r *et* R *les rayons des cercles inscrit et circonscrit.*

Représentons par S_1 *l'aire du triangle formé par l'orthocentre et par les centres des cercles inscrit et circonscrit. Soient :* Σ *l'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des bissectrices intérieures,* Σ_1, Σ_2, Σ_3 *les aires des triangles dont les sommets sont le pied d'une bissectrice,*

intérieure et les pieds des deux bissectrices extérieures issues des deux autres sommets.

Démontrer la relation $\dfrac{\Sigma}{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3} = \dfrac{r^2 S_1^2}{R^2 S^4}$ **J.-F. d'Avillez.**

Solution, par **N. Plakhowo.**

$$\sum = \frac{2abcS}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \quad \sum_1 = \frac{2abcS}{(b+c)(a-c)(a-b)},$$

$$\sum_2 = \frac{2abcS}{(b-c)(a+c)(a-b)}, \quad \sum_3 = \frac{2abcS}{(b-c)(a-c)(b+a)},$$

d'après les formules données par M. Dostor dans les *Nouvelles Annales*, question 1, § **40**, et $S_1 = \dfrac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r}$ d'après la formule de M. Sondat, *Nouvelles Annales*, question 1, § **93**,

donc
$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3} = \frac{4a^2b^2c^2S^2}{(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2},$$

et
$$\frac{r^2 S_1^2}{R^2 S_4} = \frac{(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2}{64 R^2 S^4},$$

mais $R^2S^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{16}$, donc en mettant cette valeur au lieu de R^2S^2 nous observons $\dfrac{rS_1^2}{R^2S^4} = \dfrac{(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2}{4a^2b^2c^2S^2}$, en comparant ces valeurs

nous trouvons
$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3} = \frac{r^2 S_1^2}{R^2 S^4},$$
C. Q. D. F.

Soit ABC *un triangle donné*, $AA' = l_a$ *la bissectrice intérieure de l'angle* A, l'_a, l''_a, *les segments* jA, jA' *déterminés sur cette bissectrice par le centre* j *du cercle inscrit*, r *le rayon de ce cercle. Démontrer les relations*

$$\sum \frac{bc}{l_a} \cos \frac{A}{2} \cos A = p; \qquad \frac{l_a}{l'_a l''_a} \cos \frac{A}{2} = \frac{2p^2}{abc}.$$ **J.-F. d'Avillez.**

Solution, par **N. Plakhowo.**

On sait que $l_a = \dfrac{2bc}{b+c} \cos \dfrac{A}{2}$ ce qui fait que l'expression de la somme

$$\sum \frac{b+c}{2} \cos A = \frac{b+c}{2} \cos A + \frac{a+c}{2} \cos B + \frac{a+b}{2} \cos C,$$

remplaçons les cosinus par leurs valeurs en fonction des côtés, il vient

$$\frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{4bc} + \frac{(a+c)(a^2+c^2-b^2)}{4ac} + \frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{4ab}.$$

Réduisons les fractions au même dénominateur, il vient :

$$\frac{(ab+ac)(b^2+c^2-a^2) + (ab+bc)(a^2+c^2-b^2) + (ac+bc)(a^2+b^2-c^2)}{4abc}$$

en effectuant au numérateur, et en simplifiant, on trouve

$$\frac{2abc(a+b+c)}{4abc} = \frac{4abcp}{4abc} = p.$$ C.Q.F.D.

On sait que $l'_a = \dfrac{bc}{p \cos \frac{A}{2}}$; $l''_a = \dfrac{abc}{p(b+c)\cos \frac{A}{2}}$;

$$\frac{l_a}{l'_a l''_a} \cos \frac{A}{2} = \frac{\frac{2bc}{b+c}\cos^2 \frac{A}{2}}{\frac{a^2b^2c^2 \cos^2 \frac{A}{2}}{p^2(b+c)}} = \frac{2p^2}{abc}.$$ C.Q.F.D.

Soient A′, B′, C′ *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC, *et* H *son orthocentre. On prend le symétrique* A″ *de* A′ *par rapport au milieu de* BC, *et les points analogues* B″ *et* C″. *Montrer que les droites* AA″, BB″, CC″ *concourent en un même point et calculer les distances de ce point aux trois côtés du triangle* ABC. **E.-N. Barisien.**

Solution, par **N. Plakhowo.**

Si nous prenons le point A″ symétrique de A′ par rapport au milieu de BC, nous prenons un point isotomique et

$$\frac{AC''}{C''B} = \frac{b \cos A}{a \cos B}, \quad \frac{BA''}{A''C} = \frac{b \cos C}{c \cos B}, \quad \frac{CB''}{B''A} = \frac{c \cos A}{a \cos C}.$$

Faisons le produit de ces trois proportions, il vient :

$$\frac{AC''.BA''.CB''}{C''B.A''C.B''A} = 1,$$

ce qui démontre que les droites AA″, BB″, CC″ se coupent en un point.

On a, pour les coordonnées de l'orthocentre :

$$\frac{\lambda}{\operatorname{tg} A} = \frac{\mu}{\operatorname{tg} B} = \frac{\nu}{\operatorname{tg} C}.$$

Pour son réciproque, nous aurons :

$$\frac{\lambda}{\operatorname{ctg} A} = \frac{\mu}{\operatorname{ctg} B} = \frac{\nu}{\operatorname{ctg} C},$$

ou

$$\frac{\alpha}{\operatorname{ctg} A} = \frac{\beta}{\operatorname{ctg} B} = \frac{\gamma}{\operatorname{ctg} C} = \frac{S}{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C}.$$

En connaissant les coordonnées barycentriques du point réciproque de l'orthocentre, nous pouvons calculer les coordonnées normales où les distances aux côtés

$$\frac{ax}{\operatorname{ctg} A} = \frac{by}{\operatorname{ctg} B} = \frac{cz}{\operatorname{ctg} C} = \frac{2S}{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C}.$$

En mettant au lieu de $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$, nous trouvons :

$$\frac{2R \sin A x}{\frac{\cos A}{\sin A}} = \frac{2R \sin B y}{\frac{\cos B}{\sin B}} = \frac{2R \sin C z}{\frac{\cos C}{\sin C}} = \frac{2S}{\frac{\cos C}{\sin C}},$$

ou encore

$$\frac{2R \sin^2 A x}{\cos A} = \frac{2R \sin^2 B y}{\cos B} = \frac{2R \sin^2 C z}{\cos C} = \frac{2S}{\cos C} = \frac{4R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\cos A \cos B \cos C + 1}.$$

d'où

$$x = \frac{2R \sin^2 B \sin^2 C \cos A}{\cos A \cos B \cos C + 1}, \quad y = \frac{2R \sin^2 A \sin^2 C \cos B}{\cos A \cos B \cos C + 1},$$

$$z = \frac{2R \sin^2 A \sin^2 B \cos C}{\cos A \cos B \cos C + 1},$$

ou, si nous voulons calculer les distances en fonction des côtés, on sait que $\cos A \cos B \cos C + 1 = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2}$; en mettant cette valeur au lieu du dénominateur, il vient :

$$x = \frac{4R \sin^2 B \sin^2 C \cos A}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}.$$

En mettant au lieu des sinus et des cosinus leurs valeurs en fonction des côtés, et réductions et simplifications, nous avons :

$$x = \frac{2S(b^2 + c^2 - a^2)}{a(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{h_a(b^2 + c^2 - a^2)}{a^2 + b^2 + c^2};$$

$$y = \frac{2S(a^2 + c^2 - b^2)}{b(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{h_b(a^2 + c^2 - b^2)}{a^2 + b^2 + c^2};$$

$$z = \frac{2S(a^2 + b^2 - c^2)}{c(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{h_c(a^2 + b^2 - c^2)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

N. Plakhowo.

Démontrer la relation

1° $\sin^2 a + \sin^2(a + h) + \sin^2(a + 2h) + \ldots + \sin^2[a + (n - 1)h]$

$$= \frac{n}{2} - \frac{\sin nh \cos[2a + (n - 1)h]}{2 \sin h};$$

2° $\cos^2 a + \cos^2(a + h) + \cos^2(a + 2h) + \ldots + \cos^2[a + (n - 1)h]$

$$= \frac{n}{2} + \frac{\sin nh \cos[2a + (n - 1)h]}{2 \sin h}.$$

Celestri.

Solution, par **N. Plakhowo.**

Désignons la somme par S et multiplions les deux termes par 2, remplaçons $2 \sin^2(a + ph)$ par $1 - \cos(2a + 2ph)$, comme il y a n termes, alors en ajoutant n unités, nous aurons :

$$2S = n - [\cos 2a + \cos(2a + 2h) + \ldots + \cos(2a + (2n - 1)h)].$$

On sait que la somme de cosinus des arcs, en progression arithmétique $S_2 = \frac{\cos[2a + (n - 1)h] \sin nh}{\sin h}$, en mettant cette valeur au lieu de la somme des arcs, nous aurons :

$$S = \frac{n}{2} - \frac{\cos[2a + (n - 1)h] \sin nh}{2 \sin h}.$$

Cette question est connue et résolue dans les questions de trigonométrie de Desboves, p. 273.

De même, en nommant la somme des cosinus par S, et en multipliant par 2, et en remplaçant $2 \cos(a + ph)$ par $1 + \cos(2a + 2ph)$, en mettant

ces valeurs au lieu des carrés des cosinus, nous aurons ;

$$2S = n + \sin 2a + \sin(2a + 2h) + \dots + \sin(2a + \overline{n-1}h).$$

La somme des arcs des sinus, en progression arithmétique

$$S_1 = \frac{\sin(2a + \overline{n-1}h) \sin nh}{\sin h}, \quad \text{ou} \quad S = \frac{n}{2} + \frac{\sin(2a + \overline{n-1}h) \sin nh}{2 \sin h}.$$

Etant donné deux circonférences O *et* O' *dont les tangentes intérieures* xy *et* vz *sont perpendiculaires, et soient* A *et* C *les points de contacts de ces tangentes avec les deux circonférences d'un même côté de la ligne des centres. Soit* mn *la tangente commune extérieure et* E *et* H *les points de rencontre de cette tangente avec* xy *et* vz. *Le triangle* DEH *est égal au rectangle construit sur les deux rayons, c'est-à-dire à* ABCD.

Solution de M. Dordor, élève au lycée d'Alger.

Le polygone ADCKI étant commun aux deux surfaces, il suffit de prouver que le triangle BIK est équivalent à la somme des deux triangles EIA et CHK (*fig.* 1). Pour cela, menons la perpendiculaire BL à MN. Il faut prouver que BIL = EIA et que BLK = KCH.

Cherchons d'abord à démontrer que BIL = EIA.

Les deux triangles ont tout d'abord les trois angles égaux chacun à

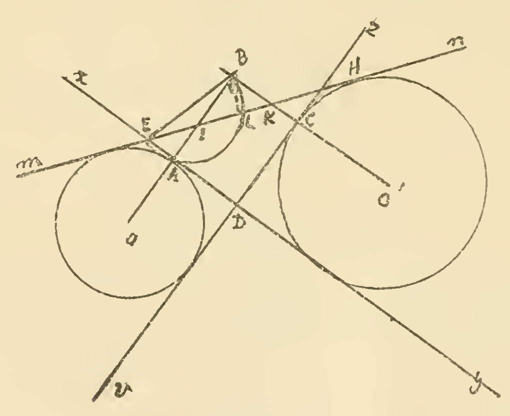


Fig. 1

chacun. En effet, ils sont rectangles et leurs angles en I sont égaux comme opposés par le sommet. Il faut démontrer maintenant qu'ils ont un côté égal chacun à chacun, par exemple que EI = IB.

Pour cela, joignons EB.

Les deux triangles ABE et LBE rectangles en A et en L sont égaux. En effet :

Ils sont inscriptibles dans une demi-circonférence.

Par conséquent, l'angle AEB de l'un = l'angle EBL de l'autre, comme ayant tous les deux même mesure que l'arc AL. De plus, ils ont l'hypothénuse égale puisque EB est commun. Donc ils sont égaux.

L'égalité de ces triangles amène l'égalité des angles BEL et EBA. Le triangle EIB est donc isocèle et EI = IB.

Par conséquent, les deux triangles EIA et BIL sont égaux comme ayant un côté égal EI = IB compris entre deux angles égaux chacun à chacun.

Les angles en I sont égaux comme opposés par le sommet et $\widehat{IEA} = \widehat{IBL}$ comme compléments d'angles égaux. Donc les deux triangles EIA et ILB sont égaux. On démontrerait de même que LBK = IHKC, c'est-à-dire que le triangle EHD = le rectangle ABCD.

NOTE SUR LE TRACÉ DE LA PARABOLE PAR POINTS

Par **E.-N. Barisien.**

Si on veut construire la parabole dont le sommet est en S et le foyer en F, on prolonge SF au delà de S, de SO = L.SF, et on mène la perpendiculaire en O à SF. On joint un point I quelconque de cette droite à S, et on mène en S une perpendiculaire à SI : par I on mène une perpendiculaire à IO : ces deux perpendiculaires se rencontrent en M. Le point M appartient à la parabole.

QUESTIONS PROPOSÉES

Des droites concourantes passant par le sommet d'un triangle ABC rencontrent les côtés opposés en A', B', C'. Soient : A'', B'', C'' le milieu de AA', BB', CC' ; Σ l'aire du triangle A''B''C'' ; R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. On a $\Sigma = 4\Sigma' = \frac{AB'.BC'.CA'}{2R}$.

(**E.-N. Barisien**).

Soient : A', B', C' les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle ABC, Σ l'aire du triangle ayant pour sommets les milieux de AA', BB', CC', $2p$ le périmètre et R le rayon du cercle circonscrit du triangle ABC. Démontrer les relations $\frac{AA'.BB'.CC'}{AB'.BC'.CA'} = \frac{2p}{R}$, $\Sigma = \frac{AA'.BB'.CC'}{16p}$.

(**E.-N. Barisien**).

Soient G, O, I, H le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle ABC. Calculer les axes des triangles IOG, IHG et IOH. (**E.-N. Barisien**).

Les tangentes en A, B, C, au cercle circonscrit à un triangle ABC, rencontrent les côtés BC, CA, AB respectivement en A_1, B_1, C_1. Montrer que les points A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite. **(E.-N. Barisien).**

On prend sur le prolongement du côté BC d'un triangle ABC_1 un point A_1 tel que $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$. Si on considère le point B_1 et C_1 analogues à A_1, ces trois points sont en ligne droite. **(E.-N. Barisien).**

Déterminer les angles B et C d'un triangle connaissant l'angle A et le rapport $\frac{BB'}{CC'} = K$ des hauteurs issues des sommets B et C.

L'expression $\frac{x^4 - x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$ peut-elle prendre toutes les valeurs possibles quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$? Indiquer les valeurs que l'expression prend pour 4 valeurs réelles de x et celles qu'elle ne prend que pour deux valeurs réelles de x.

Partager un triangle équilatéral ABC en deux parties de surfaces équivalentes par une sécante DF faisant avec la base BC un angle α. Chercher la condition que doit remplir l'angle α pour que les points D et F soient d'un même côté de la base BC. Vérifier les formules dans le cas où $\alpha = 30°$.

Deux points mobiles M et N se meuvent avec des vitesses constantes V et V' sur deux droites rectangulaires Ox, Oy. A un moment donné, ils se trouvent respectivement en A et B à des distances a et b du point O. On demande de chercher à quelle époque leur distance sera égale à une longueur donnée d. On demande en outre à quel moment la distance des deux mobiles sera la plus petite et quelle sera alors cette distance. Discussion.

Soit O le centre d'un cercle de rayon R. Par un point P pris à l'intérieur du cercle à la distance a du centre on mène la corde AC faisant l'angle α avec PO et la corde BD perpendiculaire à AC. Calculer en fonction des quantités R, a et α :

1° Les longueurs PA, PB, PC et PD ;

2° La surface du quadrilatère ABCD.

Etudier la variation de cette surface en supposant que a et R soient constants et que α varie.

On donne un cercle de rayon R et deux rayons perpendiculaires OA et OB. On demande de trouver sur l'axe AB un point M tel que, si l'on fait

tourner la figure autour de OA, la moitié du volume engendré par le segment ACM, augmenté du volume engendré par le segment BDM soit égal au $\frac{1}{8}$ du volume de la sphère ayant R pour rayon. On prendra pour inconnue la distance du point M à la droite OB.

On donne une droite indéfinie uv et deux perpendiculaires AA', BB' à cette droite, séparées par la distance $AB = a$. On prend sur uv un point M à la distance $AM = m$ du point A. Trouver sur AA' un point N et sur BB' un point P, tels que le triangle MNP soit équilatéral. On calculera $AN = y$, $BP = z$, $NP = x$. Comment varie l'aire du triangle quand le point M se déplace sur uv.

Étant donnés 4 points en ligne droite A, B, C, D, on mène par un point P quelconque du plan les circonférences PAB et PCD qui se coupent en général en un point P'.

1° Démontrer que la droite PP' passe par un point fixe, quel que soit le point P choisi.

2° Déterminer dans le plan le lieu des points P tels que les circonférences PAB et PCD soient tangentes entre elles.

Sur les côtés d'un angle droit xOy on mène deux droites antiparallèles de longueurs données : $AB = a$, $A'B' = a'$. On forme ainsi un quadrilatère inscriptible ABB'A'. 1° Démontrer la relation : $4R^2 = a^2 + a'^2$, R étant le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère; 2° Déterminer la position du quadrilatère, connaissant de plus la distance $OC = b$ du point O au centre du cercle.

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS AVEC SOLUTIONS

Déterminer les axes x *et* y *vérifiant les équations :*

$$\text{tang } x + \text{tang } y = 1,$$

$$\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La première équation s'écrit :

$$\sin (x + y) = \cos x \cos y.$$

En tenant compte de la deuxième équation du problème, on a :

$$\sin (x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le plus petit angle ayant pour sinus $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\frac{\pi}{4}$: tous les angles ayant même sinus sont compris dans les formules

$$2K\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad (2K + 1)\pi - \frac{\pi}{4},$$

K désignant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

On aura donc $$x + y = 2K\pi + \frac{\pi}{4}$$

ou $$x + y = (2K + 1)\pi - \frac{\pi}{4}.$$

La seconde équation du problème peut s'écrire :

$$2 \cos x \cos y = \sqrt{2}$$

ou : $$\cos (x + y) + \cos (x - y) = \sqrt{2}.$$

D'où : $$\cos (x - y) = \sqrt{2} - \cos (x + y).$$

La formule (1) donne : $$\cos (x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par suite : $$\cos (x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La formule (2) donne : $$\cos (x + y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où : $$\cos (x - y) = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

valeur inacceptable pour un cosinus, puisqu'elle est supérieure à l'unité. Il reste donc seulement :

(1) $$x + y = 2K\pi + \frac{\pi}{4}.$$

(3) $$\cos (x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La formule (3) fournit :

$$x - y = 2K' = 2K'\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x - y = 2K'\pi = \frac{\pi}{4},$$

K' étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Nous aurons finalement les deux systèmes suivants pour déterminer x et y.

(6) $$\begin{cases} x + y = 2K\pi + \frac{\pi}{4}, \\ x - y = 2K'\pi + \end{cases}$$

(7) $$\begin{cases} x + y = 2K\pi + \frac{\pi}{4}, \\ x - y = 2K'\pi - \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Résolvons (6). En additionnant et retranchant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$x = (K + K')\pi + \frac{\pi}{4}, \quad y = (K - K')\pi.$$

Remarquons que les nombres $K + K'$ et $K - K'$ sont deux nombres entiers quelconques, mais de même parité ; on aura donc :

$$x = K_1\pi + \frac{\pi}{4}, \quad y = K'_1\pi.$$

K_1 et K'_1 étant deux nombres entiers quelconques de même parité, positifs ou négatifs.

Le système (7) conduirait aux valeurs suivantes ;

$$x = K'_1\pi, \quad y = K_1\pi + \frac{\pi}{4};$$

ce qui est évident *a priori*, puisque les équations données ne changent pas quand on permute x en y.

Etant donné un cercle de rayon R *et un diamètre* DOA *de ce cercle, déterminer sur ce diamètre prolongé un point* B *par la condition que la surface engendrée par la tangente* BE, *menée du point* B *au cercle tournant autour du diamètre* AOD, *et la surface de la zone engendrée par l'arc* DE *tournant autour du même diamètre aient une somme égale à* m *fois la surface de la sphère de rayon* R. *On prendra comme inconnue la longueur* OB, *et on abaisse la perpendiculaire* EH *sur le diamètre* DA.

On a : $$\text{surface (BE)} + \text{surface (DE)} = m \times 4\pi R^2,$$
ou : $$\pi EH \times EB + 2\pi R \times DH = 4m\pi R^2,$$
ou : $$EH \times EB + 2R \times DH = 4mR^2,$$

$$EH = \sqrt{R^2 - \overline{OH}^2} \qquad OH \times OB = R^2. \quad \text{D'où :} \quad OH = \frac{R^2}{x}.$$

Donc : $$EH = \sqrt{R^2 - \frac{R^4}{x^2}} = \frac{R}{x}\sqrt{x^2 - R^2}.$$

$$EB = \sqrt{x^2 - R^2} \qquad DH = R + OH = R + \frac{R^2}{x} = \frac{R}{x}(x + R).$$

L'équation devient donc :

$$\frac{R}{x}\sqrt{x^2 - R^2} \times \sqrt{x^2 - R^2} + 2R \times \frac{R}{x}(x + R) = 4mR^2$$

ou : $x^2 - R^2 + 2Rx + 2R^2 - 4mRx \quad x^2 + 2R(1 - 2m)x + R^2 = 0.$

Discussion. — Il faut 1° que les racines soient réelles, ce qui exige :

$$R^2(1 - 2m)^2 - R^2 \geqslant 0 \quad \text{ou :} \quad (1 - 2m - 1)(1 - 2m + 1) \geqslant 0$$

ou : $2m(2 - 2m) \leqslant 0$ ou : $1 - m \leqslant 0$ ou : $m \geqslant 1$.

2° Une valeur de x, pour être acceptable, doit être > 0. Or, le produit est > 0, ainsi que la somme ; donc, les deux racines sont > 0 ;

3° Une valeur de x, pour être acceptable, doit être $\geqslant$ R. Remplaçons x par R. Il vient :

$$R^2 + 2R^2(1 - 2m) + R^2 \quad \text{ou} \quad 4R^2(1 - m),$$

résultat négatif. Donc R est compris entre les racines. Donc, en résumé, si m est < 1, le problème est impossible.

Si $m > 1$, il y a une solution qui est :

$$x = R(2m - 1 + 2\sqrt{m(m - 1)}).$$

Calculer les rayons des bases d'un tronc de cone, connaissant l'apothème a, *et sachant : 1° que la somme des surfaces des bases est égale à* m *fois la surface latérale ; 2° que l'apothème fait avec la grande base un angle de* 60°.

Soit OA le rayon de la grande base, O'A' celui de la petite base.

Du point A', on abaisse la perpendiculaire A'H sur le rayon OA.

On a : $\pi\left(\overline{OA}^2 + \overline{O'A'}^2\right) = m.\pi(OA + O'A') \times AA'.$

Posons $OA = x, \quad O'A' = y, \quad AA' = a.$

Cette équation devient :

(1) $$x^2 + y^2 = m(x + y)a,$$

menons A'H perpendiculaire sur les bases. L'angle A du triangle rectangle AA'H = 60°.

Donc : $$AH = \frac{AA'}{2}$$

ou :

(2) $$x - y = \frac{a}{2}.$$

De (2), je tire : $$x = y + \frac{a}{2}.$$

D'où, en substituant :

$$y^2 + ay + \frac{a^2}{4} + y^2 = am\left(y + \frac{a}{2}\right) + amy,$$

ou $$8y^2 + 4a(1 - 2m)y + a^2 - 2a^2m = 0.$$

Pour que le problème soit possible, il faut : 1° que les racines de cette équation soient réelles, ce qui exige

$$4a^2(1 - 2m)^2 - 8a^2(1 - 2m) \geqslant 0$$

ou : $$(1 - 2m)(1 - 2m - 2) \geqslant 0,$$

ou, comme le second facteur est essentiellement négatif,

$$1 - 2m < 0, \quad m > \frac{1}{2}.$$

2° Une valeur de y doit être > 0. Or, le produit des racines $\frac{a^2(1 - 2m)}{8}$ est négatif.

Donc, une racine est < 0, et l'autre > 0.

D'ailleurs, dans ces conditions, x a aussi une seule valeur réelle et > 0.

Donc, ce problème admet une solution et une seule si m est $> \frac{1}{2}$ et aucune solution, si $m < \frac{1}{2}$.

Calculer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la surface S *et la somme* $\pi\frac{a^3}{3}$ *des volumes engendrés par le triangle tournant successivement autour des deux côtés de l'angle droit.*

Soit x et y les deux côtés de l'angle droit.

L'équation : $xy = S$, exprime d'abord que la surface est S.

La deuxième condition s'exprime par :

$$\frac{\pi a^3}{3} = \frac{1}{3}\pi x^2 y + \frac{1}{3}\pi y^2 x \quad \text{ou :} \quad a^3 = x^2 y + y^2 x = xy(x + y).$$

Cette équation, en tenant compte de la première, devient :

$$a^3 = 2S(x + y).$$

D'où :

$$x + y = \frac{a^3}{2S}.$$

On peut former l'équation ayant pour racines x et y. C'est la suivante :

$$(1) \qquad Z^2 - \frac{a^3}{2S} Z + 2S = 0.$$

Condition de réalité des racines :

$$\frac{a^6}{4S^2} - 8S \geqslant 0 \quad \text{ou :} \quad S \leqslant \frac{a^2}{2\sqrt[3]{4}}.$$

Si cette condition est vérifiée, on a pour x et y un seul système de valeurs réelles :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \frac{a^3}{4S} \pm \sqrt{\frac{a^6}{16S^2} - 2S}.$$

Ces valeurs sont toutes deux positives. Il suffit de consulter la somme et le produit des racines de l'équation.

Calculer le rayon de base d'un cylindre inscrit dans une sphère de rayon donné R, *connaissant la surface totale du cylindre* $2\pi a^2$.

La surface totale du cylindre est $2\pi R^2 + 2\pi R \times H$.

Donc, d'après l'énoncé, il faudra que l'on ait :

$$2\pi R^2 + 2\pi R \times H = 2\pi a^2 \quad \text{ou} \quad R^2 + R \times H = a^2.$$

Posons $R = x$. On a : $\quad H = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

et l'équation du problème sera $\quad x^2 + 2x\sqrt{R^2 - x^2} = a^2$.

Isolant le radical, on a : $\quad 2x\sqrt{R^2 - x^2} = a^2 - x^2$,

ou, en élevant au carré : $\quad 4R^2x^2 - 4x^4 = a^4 - 2a^2 - x^2 - x^4$,

ou $\quad 5x^4 - 2(a^2 + 2R^2)x^2 + a^4 = 0$.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut :

1°) Que les racines de l'équation en x^2 soient réelles et positives. Le produit et la somme étant positifs les racines seront positives si elles sont réelles.

La condition de réalité est :

$(a^2 + 2R^2)^2 - 5a^4 \geqslant 0$, $\quad 4a^4 - 4a^2R^2 - 4R^4 \leqslant 0$. $\quad a^4 - R^2a^2 - R^4 \leqslant 0$.

ce qui exige, simplement :

$$a^2 \leqslant \frac{R^2 + \sqrt{5R^4}}{2}, \qquad a^2 \leqslant \frac{R^2(1 + \sqrt{5})}{2}.$$

2°) Cette condition étant remplie, une valeur de x^2, pour être acceptable, doit être $< a^2$; car l'équation a été obtenue en élevant au carré les deux membres de (2), ce qui suppose $a^2 - x^2 > 0$.

Remplaçons x^2 par a^2 dans le premier membre de (3), ce qui donne :

$$4a^4 - 4a^2R^2 \quad \text{ou} \quad 4a^2(a^2 - R^2).$$

Si $a^2 - R^2$ est > 0, a^2 est extérieur aux racines.

Comparons-le à la demi-somme $\frac{a^2 + 2R^2}{5}$. Nous trouvons qu'il est supérieur. Donc, les deux racines sont inférieures à a^2.

Si $a^2 - R^2$ est $< o$, une racine est supérieure à a^2 et est, par suite, à rejeter

3°) Une racine réelle, positive et $< a^2$ doit. pour être acceptable, être $< R^2$.

Remplaçons x^2 par R^2 dans le premier membre de (3). Il vient :

$5R^4 - 2a^2R^2 - 4R^4 + a^4$ ou $R^4 - 2a^2R^2 + a^4$ ou $(R^2 - a^2)^2$.

Cette quantité est nécessairement $>$ o. Donc R^2 est extérieur aux racines.

Comparons-le à la demi-somme. Nous trouvons qu'il est supérieur. Donc, les deux racines sont inférieures à R^2.

En résumé. le problème est impossible. si a^2 est $> \frac{R^2(1 + \sqrt{5})}{2}$.

Il admet deux solutions, si $R^2 < a^2 < \frac{R^2(1 + \sqrt{5})}{2}$,

et une solution pour $a^2 > R^2$.

BIBLIOGRAPHIE

Géométrie cotée, par Lucien Ibach, directeur de l'Ecole Malesherbes et G. Moriaud, professeur à Sainte-Barbe.

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge du livre de *Géométrie cotée* de MM. Ibach et Moriaud. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que toutes les questions y sont traitées de la façon la plus complète Pour chaque question, les auteurs ne se contentent pas d'une solution : presque toutes comportent plusieurs solutions, qui y sont exposées et développées. Dans chaque cas particulier, l'élève pourra choisir la plus rapide et la plus élégante et s'habituer ainsi à faire sans difficulté et dans le temps voulu les épures comprises dans les programmes des Ecoles.

Le traité est divisé en deux parties : le *texte* et les *planches*. Cette dernière partie comprend 235 planches admirablement gravées et qui ne peuvent que faciliter le travail du candidat. Rien n'a été négligé dans ce but.

Comme le dit dans sa préface M. Klein, directeur de l'Institut commercial, qui a bien voulu présenter ce livre aux lecteurs : « Ce traité, bien étudié, « bien conçu dans l'esprit des programmes, contient tout ce qu'un candidat « sérieux doit posséder... il rendra des services signalés aux jeunes gens... « et il se distingue très nettement et très avantageusement de tous ceux « qui ont été écrits avant lui ».

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ECOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

336. Mathématiques. — 1° On donne un demi cercle décrit sur AB comme diamètre et l'on mène en B la tangente BT. Cela posé, on demande de mener par le point A une sécante AMN (M, N étant les points où elle coupe la circonférence et la tangente BT), telle que, si l'on fait tourner la figure autour de AB, le volume engendré par la portion de cercle AMB soit équivalent au volume engendré par la surface MNB, limitée par les droites MN, NB et l'arc MB.

2° Etant donnés un cercle de rayon r et un point A dans son plan, on suppose menée par ce point une sécante telle que la somme des carrés des segments compris entre ce point et les points d'intersection de la sécante avec le cercle soit égale à un carré donné m^2.

Montrer que si d est la distance du point A au centre et α l'angle de la sécante avec le diamètre passant par A, on a :

$$\cos 2\alpha = \frac{m^2 - r^2}{2d^2}.$$

Etudier les limites de m si α varie, le point A étant à l'intérieur de la circonférence.

337. Epures. — **1°** On donne un point O, sa cote qui est de 45 millimètres et un point de pente $\frac{3}{5}$ passant par ce point.

On demande :

1° De construire les projections d'un tétraèdre régulier s'appuyant par sa base sur le plan donné, de telle sorte que le centre de cette base soit au point O, la longueur de l'arête étant de 70 millimètres ;

2° De faire tourner le plan donné d'un angle de 90° autour de la verticale passant par les sommets du tétraèdre ;

3° De construire les projections du solide dans cette nouvelle position.

2° On donne dans le plan de comparaison un triangle isocèle

ABC dans lequel on a AB = 12 centimètres et AC = BC = 10 centimètres.

Sur la hauteur de ce triangle issue de C, se trouve un point γ distant de AB de 3 centimètres : γ est le point de contact d'une sphère S tangente au plan de comparaison et de rayon $1^{cm},5$.

1° Projeter un tétraèdre de base ABC et circonscrit à cette sphère ;

2° Représenter le solide commun au tétraèdre et à une sphère concentrique à S et de rayon double.

338. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant

$$A = 360^{m},278 \qquad B = 62°26'07'' \qquad C = 83°28'25''.$$

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

339. Mathématiques. — 1° On donne sur un plan deux droites parallèles et un point P extérieur à ces droites ; on demande de placer la plus courte distance de ces parallèles, de façon à ce qu'elle soit vue du point P sous un angle maximum.

2° Une droite MN est perpendiculaire à un plan P au point M. D'un point A de ce plan on voit la droite MN sous un angle α ; par le point A, et dans le plan P, on mène une droite faisant avec la droite AM un angle ω et l'on prend sur cette droite une longueur AB égale à a ; du point B, on voit la longueur sous l'angle β. Cela posé, on demande de calculer la longueur MN en fonction de α, β, ω, a.

340. Physique. — 1° Un cylindre vertical de 1 décimètre de diamètre et de 3 décimètres de hauteur, communique, par sa partie inférieure, avec un tube de 1 centimètre de diamètre qui se recourbe et s'élève verticalement à une hauteur suffisante. Ce tube est ouvert à sa partie supérieure ; le cylindre est fermé et il contient un volume égal d'air et de mercure ; l'air s'y trouve sous la pression atmosphérique, de telle sorte que le mercure est au même niveau dans le cylindre et dans le tube. Alors, avec une pompe de compression, l'on introduit de l'air dans le cylindre ; le niveau du mercure s'y abaisse, tandis qu'il s'élève dans le tube ouvert. On continue cette opération jusqu'à ce que le niveau du mercure soit abaissé de 10 centimètres dans le cylindre, et l'on

demande : 1° quel est le poids de l'air qui a été introduit; 2° quelle est en kilogrammes la pression qui s'est ajoutée à celle que supportait primitivement la surface du mercure dans le cylindre. On suppose que le thermomètre s'est maintenu à zéro et le baromètre à $0^{m},76$.

2° La cloche d'une machine pneumatique renferme $3^{lit},17$ d'air. Un tube barométrique recourbé, communiquant d'une part avec la partie supérieure de cette cloche, d'autre part dans un bain de mercure, marque zéro quand la cloche est en communication avec l'air. On ferme la cloche et on fait jouer la machine : le mercure s'élève dans le tube à $0^{m},65$. Un baromètre, placé dans la chambre où se fait l'expérience, est resté à $0^{m},76$ pendant toute sa durée : on demande combien on a retiré d'air de la cloche et combien il en reste. On suppose que la température, qui était 0°, n'a pas varié.

341. Calcul logarithmique. — Calculer $\sqrt[8]{245 \times 23\sqrt[5]{42}}$ avec une approximation de 0,0001.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

342. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Etudier les variations de :
$$y = \frac{(x^2 + 1)}{x^2 - x - 6}.$$

(*Au choix*). — *a*) Enoncer et démontrer les théorèmes qui conduisent à la détermination du volume du cône.

b) Exposer les méthodes qui servent à calculer la valeur du nombre π.

c) Théorèmes concernant les volumes des triangles tournant autour d'un axe.

343. Physique. (*Obligatoire*). — Un tube cylindrique en verre, ouvert par un bout et fermé par l'autre, est en partie rempli par du mercure à 0°, dans une étendue de 95 centimètres. La longueur du tube est de 1 mètre. A quelle température faudra-t-il porter à la fois le tube et le mercure, pour que ce liquide remplisse toute la capacité intérieure ?

On prendra, pour le coefficient de dilatation cubique du verre, 0,000026, et pour celui du mercure 0,00018.

(*Au choix*). — *a*) Vapeurs saturantes et non saturantes.

b) De la détermination des intensités lumineuses par le photomètre. Différentes sortes de photomètres.

c) De la formation des images dans les lentilles bi-convexes. Discussion.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

344. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Etudier par la méthode des dérivées les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 2}.$$

(*Au choix*). — *a*) Calculer séc. $\frac{a}{2}$ connaissant tg $\frac{a}{2}$. Discuter.

b) Théorème de Dandelin.

c) Trouver l'intersection d'une droite avec une ellipse sans tracer l'ellipse. Même question pour la tangente en un point et la tangente parallèle à une direction donnée.

345. Physique. (*Obligatoire*). — Un ballon de verre contient, à 0°, 3 kilogrammes de mercure et se trouve complètement rempli par ce métal. On le chauffe à 100°. On demande quel poids de mercure en sort. Le coefficient de dilatation cubique du verre est de $\frac{1}{387\,000}$. Le coefficient de dilatation cubique du mercure est de $\frac{1}{5\,550}$. Le poids spécifique du mercure à 0° est de 13,6.

(*Au choix*). — *a*) Des pompes.

b) Electroscope.

c) Des piles à deux liquides.

V. — AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

346. Mathématique. (*Obligatoire*). — On donne un tronc de cône et on demande de calculer les rayons des deux bases, connaissant l'apothème a et sachant : 1° que la surface totale est égale à m fois celle d'un cercle de rayon $\frac{a}{2}$; 2° que l'apothème fait avec la grande base un angle de 60°.

(*Au choix*). — *a*) Résoudre un triangle connaissant un côté et les deux angles adjacents.

b) Résolution de l'équation du 2e degré.

c) Volume du tronc de pyramide.

347. Physique. (*Obligatoire*). — Deux corps de pompe verticaux et cylindriques communiquent entre eux par un tube horizontal. L'un a une section de 10 centimètres carrés, l'autre de 2 décimètres carrés : de l'eau se trouve en équilibre dans l'appareil. Si l'on vient à poser sur la surface de l'eau dans le grand corps de pompe, un piston du poids de 200 kilogrammes, avec quelle force faudra-t-il presser sur la surface du liquide dans le petit corps de pompe pour empêcher le piston de descendre?

(*Au choix*). — *a*) Des divers procédés d'aimantation.

b) Détermination des densités des liquides.

c) Lois de la réfraction. Comment les démontre-t-on expérimentalement?

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

348. Mathématiques. — 1° Un vieillard, mourant sans enfants, laisse par testament les $\frac{5}{8}$ de sa fortune à partager également entre plusieurs neveux. Quant au reste, $\frac{1}{4}$ est donné aux pauvres et les $\frac{2}{7}$ à un hospice : un frère reçoit pour sa part le reste qui s'élève à 17 500 fr. Trouver le montant de la fortune et le nombre des neveux, en sachant que chacun a reçu pour sa part 10 470 francs.

2° Calculer $x = \sqrt{10\sqrt[3]{\frac{5}{2\sqrt{68}}}}$.

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

349. Arithmétique. — Un marchand achète une pièce de drap à raison de $18^{fr},50$ le mètre. Il en revend les $\frac{2}{3}$ à $19^{fr},50$ le

mètre, puis $\frac{1}{4}$ du reste à $20^{fr},50$ et les $\frac{2}{3}$ du nouveau reste à $21^{fr},90$. Après ces trois ventes, il ne lui reste plus que $3^{m},60$ de drap, qu'il revend au prix de $21^{fr},75$ le mètre. Trouver combien la pièce contenait de mètres et combien ce marchand a gagné pour 100 sur le prix d'achat.

350. Algèbre. — Etant donnée l'équation

$$(3 - m)x^2 - 4mx + 5)3 + m) = 0,$$

trouver entre quelles limites doit varier m pour que les racines soient réelles, positives et inférieures à 10.

351. Calcul de logarithmes.

$$x = \frac{3}{4}\sqrt[13]{\frac{(8,97643)^5 \sqrt[5]{0,0001}}{97928 \sqrt[5]{0,0004}}}.$$

352. Trigonométrie. — Construire un triangle connaissant : $a = 2\,648^{m},75 \quad b = 3\,276^{m},21 \quad c = 2\,385^{m},32$.

DEUXIÈME PARTIE

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS AVEC SOLUTIONS

1° Mathématiques

Couper une sphère de rayon donné par un plan tel, que le volume du plus petit des deux segments, dans lesquels ce plan partage la sphère, ait un rapport donné K *avec le volume du cône ayant son sommet au centre de la sphère et même base que le segment.*

Soit AB le diamètre de la base du segment, O le centre de la sphère. C le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur cette base, et D le point de rencontre avec la sphère du même côté que C.

On doit avoir :

$$\frac{1}{2}\pi\overline{AC}^2 \times CD + \frac{1}{6}\pi\overline{CD}^3 = K \times \frac{1}{3}\pi\overline{AC}^2 \times OC,$$

ou, sous une autre forme :

$$3\overline{AC}^2 \times CD + \overline{CD}^3 = 2K \times \overline{AC}^2 \times OC.$$

Posons $CD = x$.

On a : $\overline{AC}^2 = x(2R - x), \quad OC = R - x.$

Remplaçons. Il vient :

$$3x^2(2R - x) + x^3 = 2Kx(2R - x)(R - x),$$

ou, en divisant par x :

$$(1 + K)x^2 - 3R(1 + K)x + 2KR^2 = 0.$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut :

1° Que les racines soient réelles, ce qui exige :

$$9R^2(1 + K)^2 - 8KR^2(1 + K) \geqslant 0,$$

ou, en divisant par $R^2(1 + K)$ qui est > 0 ;

$$9 + 9K - 8K \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad 9 + K \geqslant 0,$$

condition toujours remplie.

2° Qu'une valeur de x, au moins, soit > 0. Or, elles le sont toutes deux, puisque le produit et la somme sont > 0.

3° Enfin, il faut qu'une valeur de x, au moins, soit $\leqslant 2R$.

Or, remplaçons x par $2R$. Le premier terme de l'équation devient :

$$(1 + K)4R^2 - 6R^2(1 + K) + 2KR^2,$$

ou, toutes réductions faites, $-2R^2$.

Donc $2R$ est compris entre les racines, puisque le résultat de cette substitution est essentiellement négatif. Donc, une seule de ces racines est bonne, celle que l'on obtient en prenant le signe $-$ devant le radical.

Soient B *et* b *les bases d'un tronc de pyramide à bases parallèles. Calculer en fonction de* B *et* b *la surface de la section faite dans ce tronc à égale distance des deux bases.*

Soit β la surface cherchée. Désignons par l, λ et L, trois côtés homologues des trois polygones dont les surfaces sont b, β et B.

D'abord, on a :

(1) $$\lambda = \frac{L + l}{2}.$$

On a, en outre, les relations :

(2) $$\frac{b}{B} = \left(\frac{l}{L}\right)^2,$$

(3) $$\frac{b}{\beta} = \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

L'équation (3) devient donc, en remplaçant λ par sa valeur $\frac{l + L}{2}$:

$$\frac{b}{\beta} = \frac{4l^2}{(L + l)^2},$$

$$\frac{\beta}{b} = \frac{1}{4}\,\frac{L^2 + l^2 + 2Ll}{l^2} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{L^2}{l^2} + \frac{2L}{l}\right),$$

ou, en remplaçant $\frac{L}{l}$ par $\sqrt{\frac{B}{b}}$, valeur résultant de (2) :

$$\frac{\beta}{b} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{B}{b} + 2\sqrt{\frac{B}{b}}\right), \quad \beta = \frac{1}{4}\,(b + B + 2\sqrt{Bb}),$$

ce qui est la valeur demandée.

Par le centre d'un carré on élève sur son plan une perpendiculaire dont on joint l'extrémité aux sommets du carré, ce qui donne une pyramide; on demande de calculer le côté du carré, connaissant le volume et la surface de la pyramide ainsi formée.

Soit O le centre du carré, x la longueur de son côté, S le sommet de la pyramide et E le milieu de l'un des côtés du carré.

Soient enfin V le volume et Σ la surface totale.

On a : $V = \frac{1}{2} x^2 \times SO$, d'où $x^2 \times SO = 3V$,

et $S = x^2 + 4 \frac{x \times SE}{2} = x^2 + 2x \times SE$, d'où $x^2 + 2xSE = \Sigma$.

Le triangle rectangle SOE donne, d'ailleurs :

$$SE = \sqrt{\overline{SO}^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4SO^2 + x^2}, \quad \text{d'où} \quad x^2 + x\sqrt{4SO^2 + x^2} = \Sigma.$$

Remplaçons SO par $\frac{3V}{x^2}$, on a :

$$x^2 + x\sqrt{4 \times \frac{9V^2}{x^4} + x^2} = \Sigma, \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{1}{x}\sqrt{36V^2 + x^2} = \Sigma,$$

ou $36V^2 + x^6 = (\Sigma x - x^3)^2$, ou $2\Sigma x^4 - \Sigma^2 x^2 + 36V^2 = 0$.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les racines de l'équation en x^2 soient réelles ; car, si elles le sont, elles sont aussi > 0. Il faut donc et il suffit que l'on ait :

$$\Sigma^4 - 288\Sigma V^2 \geqslant 0, \quad \text{ou} \quad \Sigma^3 \geqslant 288V^2.$$

Dans ces conditions, le problème admet deux solutions :

$$x = \sqrt{\frac{\Sigma^2 \pm \sqrt{\Sigma^4 - 288\Sigma V^2}}{4\Sigma}}.$$

Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône connaissant l'apothème a *et sachant* : 1° *que la somme des surfaces des bases est égale à* m *fois la surface latérale* ; 2° *que l'apothème fait avec la grande base un angle de* 60°.

Soit OAO'A' le trapèze qui engendre le tronc de cône par sa rotation autour de OO'. Soit A'H la perpendiculaire abaissée de A' sur OA.

On veut avoir :

$$\pi(\overline{OA}^2 + \overline{O'A'}^2) = m\pi(OA + O'A')AA'.$$

Posons : $OA = x$, $O'A' = y$, $AA' = a$.

Cette équation devient :

(1) $$x^2 + y^2 = m(x + y)a.$$

L'angle A du triangle rectangle AA'H étant égal à 60°, on a :

$$AH = \frac{AA'}{2}.$$

ou

(2) $$x - y = \frac{a}{2}.$$

De (2) l'on tire : $x = y + \frac{a}{2}$.

D'où, en substituant :

$$y^2 + ay + \frac{a^2}{4} + y^2 = am\left(y + \frac{a}{2}\right) + amy,$$

ou $$8y^2 + 4a(1 - 2m)y + a^2 - 2a^2m = 0.$$

Pour que le problème soit possible, il faut :

1° Que les racines de cette équation soient réelles, ce qui exige :

$4a^2(1 - 2m)^2 - 8a^2(1 - 2m) \geqslant 0$, ou $(1 - 2m)(1 - 2m - 2) \geqslant 0$.

ou, comme le second facteur est essentiellement négatif,

$$1 - 2m < 0, \quad \text{ou} \quad m > \frac{1}{2}.$$

2° Il faut qu'une valeur de y soit > 0. Or, le produit des racines $\frac{a^2(1-2m)}{8}$ est négatif. Donc, une racine est < 0 et l'autre > 0. D'ailleurs, dans ces conditions, x a aussi une seule valeur réelle est > 0.

Donc, ce problème admet une solution et une seule si m est $> \frac{1}{2}$ et aucune solution si $m < \frac{1}{2}$.

Déterminer les arcs x *et* y *vérifiant les équations* :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \quad \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La première équation du problème s'écrit :

$$\sin(x+y) = \cos x \cos y.$$

En tenant compte de la deuxième équation, on a :

$$\sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le plus petit angle ayant pour sinus $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\frac{\pi}{4}$. Tous les angles ayant même sinus sont compris dans les formules :

$$2K\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \text{ou} \quad (2K+1)\pi - \frac{\pi}{4},$$

K désignant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

On aura donc :

(1) $$x + y = 2K\pi + \frac{\pi}{4},$$

ou

(2) $$x + y = (2K+1)\pi - \frac{\pi}{4}.$$

La seconde équation du problème peut s'écrire :

$$2\cos x \cos y = \sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad \cos(x+y) + \cos(x-y) = \sqrt{2}.$$

D'où $$\cos(x-y) = \sqrt{2} - \cos(x+y).$$

La formule (1) donne : $\cos(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Par suite,

(3) $$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La formule (2) donne : $\cos(x+y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où $\cos(x-y) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, valeur inacceptable pour un cosinus, puisqu'elle est supérieure à l'unité.

Il reste donc seulement :

(1) $$x + x = 2K\pi + \frac{\pi}{4},$$

(3) $$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La formule (3) fournit :

(4) $$x - y = 2K'\pi + \frac{\pi}{4},$$

(5) $$x - y = 2K'\pi - \frac{\pi}{4},$$

K' étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Nous aurons finalement les deux systèmes suivants pour déterminer x et y.

(6) $$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2K\pi + \dfrac{\pi}{4}, \\ x - y = 2K'\pi + \dfrac{\pi}{4}. \end{array} \right.$$

(7) $$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2K\pi + \dfrac{\pi}{4}, \\ x - y = 2K'\pi + \dfrac{\pi}{4}. \end{array} \right.$$

Résolvons (6). En additionnant et retranchant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$x = (K + K')\pi + \frac{\pi}{4}, \quad y = (K - K')\pi.$$

Remarquons que les nombres $K + K'$ et $K - K'$ sont deux nombres entiers quelconques, mais de même parité. On aura donc :

$$x = K_1\pi + \frac{\pi}{4}, \quad y = K'_1\pi,$$

K_1 et K'_1 étant deux nombres entiers quelconques de même parité, positifs ou négatifs.

Le système (7) conduirait aux valeurs suivantes :

$$x = K'_1\pi, \quad y = K_1\pi + \frac{\pi}{4},$$

ce qui est évident *à priori*, puisque les équations données ne changent pas quand on permute x en y.

Dans un triangle ABC, *on donne les côtés* AB = c, AC = b, *et l'on sait que la base* BC *est égale à la hauteur correspondante. Ceci posé, on demande de calculer l'angle* A.

Désignons par l la longueur commune du côté BC et de la hauteur.

On a : $$l^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

et, en écrivant l'expression de la surface de deux manières différentes,

$$bc \sin A = l^2.$$

D'où $(\sin A + 2 \cos A)bc = b^2 + c^2$, $\quad \sin A + 2 \cos A = \dfrac{b^2 + c^2}{bc}$.

Soit φ le plus petit angle dont la tangente est égale à 2. On peut écrire l'équation sous la forme :

$$\sin A + \cos A \operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2 + c^2}{bc},$$

$$\sin (A + \varphi) = \frac{b^2 + c^2}{bc} \cos \varphi = \frac{b^2 + c^2}{bc} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Discussion. — Sin $(A + \varphi)$ étant ici toujours positif, il suffit d'écrire que sa valeur est inférieure ou égale à 1 :

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant 1, \quad b^2 - \sqrt{5}\, bc + c^2 \leqslant 0.$$

Il faut donc que le rapport $\frac{b}{c}$ soit égal aux racines de ce trinomèdre compris entre ces racines :

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Si $\frac{b}{c}$ a une de ces valeurs, on a :

$$A + \varphi = 90^\circ, \quad A = 90^\circ - \varphi,$$

valeur positive, car φ est inférieur à 90°. Il y a, dans ce cas, une seule solution.

Supposons $$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \frac{b}{c} < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Au sinus correspondent deux angles supplémentaires $A + \varphi$ et $\pi - (A + \varphi)$. Supposons $A + \varphi$ aigu. Pour que l'angle A correspondant convienne, il faut que $A + \varphi$ soit supérieur à φ, et, comme ces deux angles sont aigus, il suffit que l'on ait :

$$\sin (A + \varphi) > \sin \varphi, \quad \frac{b^2 + c^2}{bc} \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$b^2 + c^2 > 2bc, \quad (b - c)^2 > 0,$$

ce qui a lieu si b n'est pas égal à c. Quant à l'angle obtus $\pi - (A + \varphi)$, il donne un angle positif A, puisque φ est aigu.

Le problème a donc alors deux solutions.

Solution géométrique. — Pour construire ce triangle, nous pouvons d'abord construire un triangle semblable. Il sera ensuite facile d'obtenir le triangle demandé.

Prenons une base BC quelconque en longueur l et supposons $b > c$. Le sommet A sera sur une parallèle à BC, située à une distance l de BC.

De plus, le rapport des distances de ce point aux points B et C est égal à $\frac{b}{c}$. Le sommet A est donc sur une circonférence de diamètre MN, M et N étant deux points de BC, tels que l'on ait :

$$\frac{MC}{MB} = \frac{b}{c}, \quad \frac{NC}{NB} = \frac{b}{c}.$$

On en conclut : $$MC = \frac{lb}{b + c}, \quad NC = \frac{lb}{c - b}.$$

La longueur MN est donc égale à $\frac{2lbc}{c^2 - b^2}$.

Pour que le problème soit possible, il faut que le rayon $\frac{lbc}{c^2 - b^2}$ de la circonférence ne soit pas inférieure à la distance l des deux droites

$$\frac{lbc}{c^2 - b^2} \geqslant l, \quad bc \geqslant c^2 - b^2, \quad b^2 + bc - c^2 \geqslant 0.$$

Le rapport $\frac{b}{c}$ doit donc être inférieure à $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou supérieure à $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ce rapport, étant positif, sera supérieur à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$: et, comme on a supposé $b > c$, le rapport $\frac{b}{c}$ sera compris entre $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et 1. Le rapport $\frac{c}{b}$ sera compris entre 1 et $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ ou 1 et $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

De sorte que, si l'on ne spécifie pas quel est le plus grand côté, on peut dire que le rapport $\frac{b}{c}$ est compris entre $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Dans ce cas, il y aura deux points A. Si $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, la circonférence est tangente à la droite lieu de A. Il n'y a qu'une solution.

Tout ceci suppose b différent de c. Si $b = c$, le sommet se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de BC, et il n'y a qu'une solution.

On donne un angle droit XOY, *et dans l'intérieur de cet angle, un point* A *dont les distances aux côtés sont* a *et* b. *On demande de mener par le point* A *une droite rencontrant* OX, OY *aux points* M *et* N *et telle que l'on ait :*

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{AN}}^2 = \mathrm{K}^2,$$

K^2 *étant un carré donné.*

Prenons comme inconnu l'angle x que fait la sécante avec le côté OX.

Nous avons : $$\mathrm{AM} = \frac{b}{\sin x}, \quad \mathrm{AN} = \frac{a}{\cos x}.$$

L'équation est donc : $$\frac{b^2}{\sin^2 x} + \frac{a^2}{\cos^2 x} = \mathrm{K}^2,$$

ou, en remplaçant sin x et cos x par leurs valeurs en tg x.

$$b^2(1 + \mathrm{tang}^2 x) + a^2 \mathrm{tang}^2 x(1 + \mathrm{tang}(x) = \mathrm{K}^2 \mathrm{tang}^2 x,$$

ou : $$a^2 \mathrm{tang}^4 x + (a^2 + b^2 - \mathrm{K}^2)\,\mathrm{tang}^2 x + b^2 = 0.$$

Cette équation doit avoir des racines réelles et, comme x est compris entre 0 et 90°, il ne faudra prendre que les valeurs positives.

La condition de réalité est :

$$(a^2 + b^2 - \mathrm{K}^2)^2 - 4a^2b^2 \geqslant 0.$$

ou $$(a^2 + b^2 - 2ab - \mathrm{K}^2)\,(a^2 + b^2 + 2ab - \mathrm{K}^2) \geqslant 0,$$

ou $$\mathrm{K}^2 \leqslant (a - b)^2,$$

De plus, le produit $\frac{b^2}{a^2}$ des racines est tang²x étant positif, il faut que la somme soit positive, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\mathrm{K}^2 > a^2 + b^2.$$

En comparant ces différentes inégalités, on voit que la seule condition de réalité est : $$\mathrm{K}^2 \geqslant (a + b)^2.$$

Il faudra donc alors prendre les deux racines positives pour valeurs de tang x, si $\mathrm{K}^2 > (a + b)^2$.

Si $K^2 = (a + b)^2$, il y a une solution, qui correspond à tang $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ = tang α, α étant l'angle AOX.

2° Physique

Dans un vase de plomb à 30°, pesant 4 kilogrammes, on introduit 20 grammes de glace à 0°. Quelle sera la température finale du vase quand l'eau aura la même température que celui-ci ?

Chaleur spécifique du plomb = 0,03. *Chaleur de fusion de la glace* = 80 cal. *On supposera que le vase est parfaitement isolé au point de vue calorifique.*

Le vase, en se refroidissant de 30° à x°, dégage :

$$4 \times 0{,}03(30 - x) \text{ calories.}$$

La glace, pour fondre, absorbe :

$$0{,}02 \times 80 \text{ calories.}$$

L'eau provenant de la fusion de la glace absorbe, pour passer de 0° à x° :

$$0{,}02 \times x \text{ calories.}$$

D'où l'équation : $4 \times 0{,}03(30 - x) = 0{,}02 \times 80 + 0{,}02x$,

ou : $$3{,}60 - 0{,}12x = 1{,}60 + 0{,}02x$$

ou : $$0{,}14x = 2$$

d'où : $$x = \frac{200}{14} = \frac{100}{7} = 14^{\circ}{,}3.$$

Une masse d'air est emprisonnée dans un cylindre vertical fermé à la partie supérieure par un piston du poids de 10^{kil},200.

1° *Calculer la force élastique de cette masse d'air, sachant que la pression égale* 750 *millimètres; que la densité du mercure est* 13,6 *et que la section droite du cylindre égale* 10 *centimètres carrés.*

2° *On place sur le piston un poids de* 20 *kilos. Calculer la hauteur dont se déplacera le piston. La distance qui sépare la base du cylindre de la partie inférieure du piston est, dans la première partie de l'expérience, de* 3 *décimètres.*

1° Soit x la pression demandée en millimètres de mercure. La pression en kilogrammes, exercée par cet air sur la surface du piston, sera donc :

$$0{,}1 \times 0{,}01 \times 13{,}6 \times x.$$

L'équation du problème sera donc :

$$0{,}1 \times 0{,}01 \times 13{,}6 \times x = 10{,}2 + 0{,}1 \times 7{,}5 \times 13{,}6.$$

D'où : $$x = \frac{10{,}2 + 10{,}2}{0{,}0136}.$$

D'où $$x = 1\,500 \text{ millimètres.}$$

2° On a deux états successifs d'une même masse gazeuse.

Appliquons la formule : $VH = V'H'$.

On a : $$V = 0{,}1 \times 1 = 0{,}1,$$
$$H = 20{,}4,$$
$$V' = 0{,}1(1 - y),$$

y désignant la hauteur en décimètres dont s'abaisse le piston.

Enfin, $$H' = 20{,}4 + 20 = 40{,}4.$$

Donc, l'équation est : $2,04 = 4,04 - 4,04y$.

D'où $$y = \frac{4,04 - 2,04}{4,04} = \frac{2}{4,04} = 0^{dm},49.$$

Si on suppose la distance primitive de 3 décimètres au lieu de 1, on a :

$$61,2 = 40,4(3 - y).$$

D'où : $$y = \frac{121,2 - 61,2}{40,4} = \frac{60}{40,4} = 1^{dm},48.$$

Un rayon de lumière homogène pénètre, normalement à la face d'entrée, dans un prisme dont l'angle réfringent est de 30°. *On constate qu'il prend à l'émergence une déviation de* 30°.

On demande :

1° *De calculer l'indice de réfraction de la substance formant le prisme pour la lumière observée ;*

2° *De déterminer la valeur de la déviation minima pour un second prisme de même substance et dont l'angle réfringent serait de* 60°.

1° Appliquons les formules ;

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n, \quad \frac{\sin i'}{\sin r'} = n, \quad A = r + r', \quad D = i - r + i' - r.$$

Dans le premier cas, on a : $i = 0$.

D'où $r = 0$.

Remplaçons dans la troisième formule.

On a : $30° = r'$.

Remplaçant également dans la quatrième, on a :

$$30° = i' - 30°.$$

D'où : $i' = 60°$.

D'où, en remplaçant dans la deuxième :

$$n = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \sqrt{3}$$

2° La déviation est minima, quand $i' = i$.

D'où $$r' = r, \quad A = 2r, \quad r = \frac{60°}{2} = 30°.$$

D'où $$\frac{\sin i}{\sin 30} = \sqrt{3}. \quad \sin i = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'où enfin $i = 60°$.

Donc, $D = 2i - 2r = 120° - 60° = 60°$.

Six éléments de piles identiques, associés en tension, donnent, dans un conducteur A *qui réunit les pôles de la pile, un courant de* 10 *ampères. En ne mettant en tension que trois de ces éléments, on obtient dans le même conducteur un courant de* 6 *ampères.*

Combien faut-il mettre de ces éléments en tension pour que les piles ainsi réunies fournissent dans le conducteur A *un courant de* 20 *ampères ?*

Soit e la force électromotrice en volts, r la résistance en ohms d'un des éléments, A la résistance en ohms du conducteur.

L'application de la loi d'ohm aux trois cas de l'énoncé donne, en désignant par i, i' et I les intensités, n, n' et N les nombres d'éléments :

$$i = \frac{ne}{nr + A}, \quad i' = \frac{n'e}{n'r + A}, \quad I = \frac{Ne}{Nr + A}.$$

Ces trois équations contiennent quatre inconnues, e, r, A et N, dont une seule est demandée.

En cherchant les dénominateurs, on aura les équations :

$$nir + iA - ne = 0 \qquad n'i'r + i'A - n'e = 0, \qquad NIr + IA - Ne = 0.$$

En divisant partout par r, on n'aura plus que 2 inconnues auxiliaires : $\frac{A}{r} = \frac{e}{r}$. On les tirera des deux premières et on les portera dans la troisième qui ne contiendra d'autre inconnue que N.

Les deux premières équations résolues par rapport à $\frac{e}{r}$ et $\frac{A}{r}$ donnent :

$$\frac{e}{r} = \frac{(n - n')ii'}{ni' - n'i}, \quad \frac{A}{r} = \frac{nn'(i - i')}{ni' - n'i}.$$

La troisième équation peut se mettre sous la forme :

$$N = \frac{I\frac{A}{r}}{\frac{e}{r} - I}.$$

Remplaçant $\frac{A}{r}$ et $\frac{e}{r}$ par leurs valeurs, on a :

$$N = \frac{nn'(i - i')I}{(n - n')ii' - I(ni' - n'i)}.$$

Substituant aux lettres leurs valeurs numériques, on obtient enfin :

$$N = \frac{3 \times 60^{\circ} - 20(36 - 30)}{6 \times 3 \times 4 \times 20} = 24.$$

Il faudra donc mettre 24 éléments.

TROISIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Géométrie cotée, par Lucien Ibach, directeur de l'Ecole Malesherbes et G. Mariaud, professeur à Sainte-Barbe.

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge du livre de *Géométrie cotée* de MM. Ibach et Mariaud. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que toutes les questions y sont traitées de la façon la plus complète Pour chaque question, les auteurs ne se contentent pas d'une solution : presque toutes comportent plusieurs solutions, qui y sont exposées et développées. Dans chaque cas particulier, l'élève pourra choisir la plus rapide et la plus élégante et s'habituer ainsi à faire sans difficulté et dans le temps voulu les épures comprises dans les programmes des Ecoles.

Le traité est divisé en deux parties : le *texte* et les *planches*. Cette der-

nière partie comprend 235 planches admirablement gravées et qui ne peuvent que faciliter le travail du candidat. Rien n'a été négligé dans ce but.

Comme le dit dans sa préface M. Klein, directeur de l'Institut commercial, qui a bien voulu présenter ce livre aux lecteurs : « Ce traité, bien étudié, « bien conçu dans l'esprit des programmes, contient tout ce qu'un candidat « sérieux doit posséder... il rendra des services signalés aux jeunes gens... « et il se distingue très nettement et très avantageusement de tous ceux « qui ont été écrits avant lui ».

Opinions et Curiosités touchant la Mathématique, d'après les ouvrages français des XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, par Georges Maupin, licencié ès sciences mathématiques et physiques. 1 vol. in-8° carré de 200 pages, avec figures, cartonné à l'anglaise. Prix : 5 francs (Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine, Paris).

Quelles opinions avaient de l'utilité des mathématiques dans les siècles précédents non seulement les savants, mais surtout les faiseurs de livres et même les ignorants? Quels avantages pensait-on en retirer pour l'éducation; quelle liaison singulière voulait-on établir entre la doctrine mathématique et la religion? Voilà ce qui est traité dans ce volume. En donnant des extraits curieux et piquants des auteurs qu'il cite, M. Maupin ne s'est permis d'y ajouter que de brefs commentaires et de courtes notes biographiques, ne voulant rien ôter de leur caractère aux textes mentionnés. Ajoutons que ce n'est pas là un ouvrage savant et que, dans ses parties les plus saillantes, on s'est efforcé de le rendre intelligible à tous ceux qui ont en mathématiques des connaissances moyennes. Ce livre a, par ailleurs, un côté documentaire qui séduira les personnes qu'intéresse l'évolution de l'esprit mathématique à travers les graves querelles d'écoles et les discussions brûlantes des dogmatistes. — Les mathématiciens trouveront un vif intérêt à cette excursion rétrospective dans le domaine de la géométrie, et les curieux, que n'effrayent pas les soutenances imprévues, prendront plaisir à l'intervention des mathématiques dans le dogme de la Présence réelle. — D'autre part, le volume de M. Maupin, en tout décidément instructif, nous donne, en manière d'actualité, des aperçus originaux sur ce que pensaient de l'utilité du latin, dans l'enseignement, les maîtres d'autrefois. — Bien des idées que nous émettons aujourd'hui sur ce sujet sont, à la vérité, celles d'hier, et nous devons au livre de M. Maupin la satisfaction de l'apprendre.

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S-CYR

353. Mathématiques. — On prend sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle donné ABC les points D, E, F tels qu'on ait : $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = K$.

On demande : 1° D'évaluer, en fonction de l'aire des triangles ABC et du rapport donné K, les aires des triangles AFE, BDF, CED et DEF, puis de suivre la variation de l'aire de ce triangle DEF, lorsque K varie ;

2° En supposant que K varie, de trouver le lieu géométrique décrit par le milieu de chaque côté du triangle DEF et de montrer que le centre de gravité de l'aire de ce triangle reste fixe.

354. Epure. — Un tétraèdre régulier, dont les arêtes sont égales à 12 centimètres, a un des côtés de sa base parallèle au petit axe de la feuille et à 4 centimètres en dessous de cet axe. Son plan de base a une pente de 15°.

On considère un cône de révolution ayant même axe que celui du tétraèdre, son demi-angle au sommet est de 10° et le sommet est au milieu de la hauteur du tétraèdre.

On demande : 1° de déterminer l'intersection du cône et du tétraèdre ;

2° de représenter le tétraèdre avec son entaille, le cône étant supposé enlevé.

On déterminera la tangente en un point et les points remarquables de l'intersection.

355. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle, connaissant : $a = 3\,285^m,58$; $B = 25°38'22''9$ et si $a = 1\,866^m,32$.

Questions posées à l'oral. 1° *Mathématiques.* — On donne un demi-cercle de diamètre AB, mener une corde AM de façon que les deux surfaces partielles déterminées dans le demi-cercle par AM, engendrent des volumes équivalents en tournant autour de AB.

— Construire un triangle connaissant l'angle A, le côté b et la médiane m, issue du sommet A.

— On donne un cône circulaire droit. On demande à quelle distance du centre de la base il faut mener une corde dans le plan de la base, de manière que le triangle déterminer par cette corde et par le sommet du cône soit équilatéral.

— On donne dans un triangle ABC l'angle A, le côté b et le rapport $a = K$. Résoudre ce triangle. Le construire. Discuter.

— On donne dans un triangle l'angle A, la médiane et la hauteur issues du sommet de cet angle. Résoudre ce triangle.

— On donne un triangle ABC. Joindre le sommet A à un point D de la base BC, de façon que l'on ait $\overline{AD}^2 = BD \times DC$.

— Connaissant les côtés b, c, d'un triangle et la bissectrice intérieure de ces deux côtés. Résoudre le triangle. Le construire.

— Démontrer que l'on a la relation :

$$\cos(b + c - a) + \cos(c + a - b) + \cos(a + b - c) + \cos(a + b + c) = 4 \cos a . \cos b . \cos c.$$

— On donne un trapèze ABCD. Mener une droite MN perpendiculaire aux bases et telle que les deux trapèzes AMND, BMNC soient équivalents. Solution géométrique. Généraliser ce problème.

— Résoudre un triangle, connaissant l'angle A, la somme $\sin A + \sin B + \sin C = m$ et le périmètre $2p$.

— Discuter la fonction : $y = x + \frac{a^2}{x}$.

— On donne un cercle et un point P à l'intérieur de ce cercle. Mener par P une sécante dont P est le milieu.

— Supposant que les côtés d'un triangle soient mesurés par les nombres 4, 5 et 6, démontrer que le plus grand angle du triangle est double du plus petit.

— Résoudre l'équation : $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2} = a + b$.

— On donne un triangle ABC, trouver un point S de l'espace d'où l'on voit les côtés AB, AC, CB sous un angle droit. Nombre de solutions. Calculer les côtés SA, SB, SC du trièdre tri-rectangle ainsi obtenu.

— On donne une circonférence de rayon R et un point P extérieur à la circonférence et à une distance a de son centre O. Mener par P une sécante PAB, telle que l'angle $\widehat{AOP}$ soit le double de l'angle $\widehat{APO} = x$.

— On donne un cercle, un diamètre fixe AB de ce cercle. On

mène un rayon variable OM, on abaisse du point M la perpendiculaire MP sur AB. Trouver le lieu du centre de gravité de la surface du triangle MOP.

2° *Physique et Chimie.* — Parler de la fusion des corps? Comment se fait le phénomène? Est-il le même pour tous les corps? Parler de la fusion du fer, du soufre, de la fonte, de l'acier. Quelles sont les lois de la fusion? Parmi les deux systèmes de fusion des corps, auquel s'appliquent ces lois? Le fer fond-il à une température fixe?

— Parler de la lunette astronomique. Qu'appelle-t-on foyer d'une lentille? Décrire la marche des rayons dans la lunette astronomique. Qu'entend-on par champ d'une lunette astronomique? Conserve-t-on la lunette tout le champ qu'on est susceptible d'avoir? Dans ce champ, toutes les parties de l'image sont-elles également éclairées? Examiner l'image, au point de vue de son éclairement, d'un point situé sur le bord du champ.

— Qu'est-ce qu'on entend par dissolution? Y a-t-il phénomène calorifique? Mélanges réfrigérants. Qu'est-ce qu'une solution sursaturée? Comment l'obtient-on? Quelles sont les lois de la solubilité? Peut-on représenter la variation de la solubilité d'une façon simple? Quelle est la marche générale des courbes de solubilité?

— Phosphore. Propriétés physiques et chimiques. A quelle température fond-il? Qu'arrive-t-il, si on le chauffe à l'air? A quelle température s'enflamme-t-il? Quelles précautions faut-il prendre quand on manipule du phosphore? Comment le met-on à l'abri de l'air?

— Parler du cuivre. Quels sont les minerais de cuivre? Comment passe-t-on du sulfure de cuivre au métal?

— Parler des propriétés chimiques du carbone. Comment reconnaît-on le carbone? Qu'est-ce que le charbon de sucre? Expérience de M. Moissan sur la production artificielle du diamant. Qu'est-ce qu'un four électrique? Comment caractérise-t-on l'acide carbonique?

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

356. Mathématiques. — Trois personnes s'étaient associées pour un commerce et avaient apporté : la première 25 700 fr., la deuxième 30 000 fr. et la troisième 28 600 fr.; mais, 4 mois après avoir fondé leur société, elles s'adjoignent une quatrième personne qui apporte 36 800 fr. Afin d'étendre leurs opérations, le premier verse de nouveau, 3 mois plus tard, 12 600 fr.; et, 2 mois ensuite, le troisième apporte 9 500 fr., 23 mois après la fondation de la société, il y a 52 836fr,70 de bénéfice à partager. Quelle sera la part de chaque associé?

— Chasser les radicaux du dénominateur de l'expression :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}.$$

357. Physique. — Dans un récipient de 20 litres de capacité se trouve de l'air sec à la pression de 1 320 millimètres. Un ballon de 12 litres de capacité contient, sur la pression de 780 millimètres, un mélange d'air et de vapeur d'eau, la tension de cette dernière étant de 3mm,8. La température du ballon est de 10° et celle du récipient est de 25°.

On mélange les deux masses gazeuses et l'on demande quelle sera, après cette opération, la pression du mélange gazeux.

On demande également d'en calculer le poids.

358. Calcul logarithmique. — Calculer

$$x = \sqrt[5]{\pi \sqrt[3]{3 \times \frac{1}{\pi}}}$$

avec une approximation de 0,00001.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

359. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Etudier les variations de :
$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 5x + 2}.$$

(*Au choix*). — *a*) Enoncer et démontrer tous les théorèmes qui conduisent à la détermination du volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

b) Énoncer et démontrer tous les théorèmes qui permettent de déterminer le volume du cône.

c) Résumer tous les théorèmes relatifs à la perpendicularité d'une droite sur un plan.

360. Physique. — On plonge dans un vase qui contient 10 litres d'eau à 100° un bloc de glace du poids de 3 kilos. Après avoir attendu que la température soit devenue stationnaire, on plonge de nouveau dans le vase un bloc de glace qui provoque un nouvel abaissement de température de 10°. On demande quel était le poids de ce dernier bloc de glace.

On ne tient compte ni de la chaleur absorbée par le vase ni de celle qui a pu être perdue par rayonnement.

(*Au choix*). — *a*) Des corrections barométriques.

b) Vapeurs saturantes et non saturantes.

c) Formation des images dans les miroirs sphériques concaves. Discussion.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

361. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Construire la courbe des variations de : $y = \frac{\lambda x^2 + 2x - 1}{2x^2 + \lambda x - 1}$ modifications que subit cette courbe lorsque λ varie.

(*Au choix*). — *a*) Construire une droite qui passe des angles donnés aux deux droites données.

b) Trièdres supplémentaires.

c) Sections planes du cône.

362. Physique. (*Obligatoire*). — On réduit à l'état de vapeur 200 grammes d'eau. On demande : 1° quel sera le volume occupé par cette vapeur à la température de 100° et sous la pression de 770 millimètres; 2° quelle serait l'élévation de température d'une masse d'eau du poids de 15 kilos, où l'on ferait condenser cette vapeur.

(*Au choix*). — *a*) Mélange des gaz et des vapeurs.

b) Des piles à deux liquides.

c) Décomposition et recomposition de la lumière.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

363. Arithmétique. — Un meunier possède 762 hectolitres de farine à 11fr,80 l'hectolitre, 347 hectolitres à 16fr,20 et 436 hectolitres à 13fr,60 : il les a toutes mélangées. Combien devra-t-il vendre l'hectolitre du mélange pour ne rien perdre et ne rien gagner?

364. Géométrie. — Construire un triangle connaissant a, A et $b + c$.

365. Calcul logarithmique. — Calculer

$$x = \sqrt[7]{2 \times \sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{6\,424}}}}.$$

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

366. Arithmétique. — 19 hommes travaillant 9h,3/4 par jour pendant 12 jours, peuvent faire 1 778m,40 d'un certain ouvrage; 23 femmes travaillant 10 heures par jour pendant 15 jours peuvent faire 1 897m,50 du même ouvrage. Combien, sur 31 ouvriers travaillant 11 heures par jour, faudra-t-il d'hommes et de femmes pour faire 3 957m,60 du même ouvrage en 17 jours?

367. Géométrie. — On demande quel serait le volume d'un tronc de pyramide droit à bases parallèles, d'une hauteur de 5m,698, dont base inférieure est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de 2m,80 de rayon et la base supérieure un hexagone régulier à un cercle de 0m,75 de rayon.

368. Algèbre. — Résoudre le système d'équations :

$$x + y + \frac{1}{x+y} = 1 \qquad x + z + \frac{1}{x+z} = 2 \qquad y + z + \frac{1}{y+z} = 3.$$

369. Calcul logarithmique.

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[7]{\frac{(10\,875)^2\sqrt[3]{0,00004}}{23\sqrt[5]{(0,84976)^2}}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

I° QUESTIONS RÉSOLUES

Du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on lui élève une perpendiculaire. Cette droite rencontre en deux points les bissectrices de l'angle droit de ce triangle. Démontrer que les distances de ces points aux côtés de l'angle droit sont égales : l'une, à la demi-somme, l'autre, à la demi-différence de ces côtés. **(Mannheim).**

Soit *oab* le triangle rectangle donné, *d* le point de rencontre de la bissectrice intérieure *od* et de la perpendiculaire *cd* au milieu de *ab*. Démontrons que $de = \frac{oa + ob}{2}$.

On a $\overline{de}^2 + \overline{ea}^2 = \overline{ad}^2 = \overline{bd}^2 = (de - ob)^2 + \overline{oe}^2$.

Or $de = oe$.

D'où $ea = de - ob$.

D'autre part, $ea = oa - de$.

Par suite, $oa - de = de - ob$ ou $de = \frac{oa + ob}{2}$, C. Q. F. D.

Démonstration analogue pour le cas où on prend la bissectrice extérieure de l'angle *aob*. **(Ernest Foucart).**

On donne un triangle asb. *Dans l'angle* asb *on inscrit un cercle tangent en* a *à* as *et un cercle tangent en* b *à* bs. *Démontrer que ces courbes interceptent des segments égaux sur* ab. **(Mannheim).**

Le cercle tangent en *a* à *sa* touche *sb* en a_1 et coupe *ab* en a', son rayon est R; on a de même b_1, b', R' pour le cercle tangent en *b* à *sb*.

On a

$$(1)\qquad \frac{R}{R'} = \frac{sa}{sb} = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

D'ailleurs, $\widehat{a_1aa'} = \widehat{a}$, $\widehat{bb_1b'} = \widehat{b}$.

D'où

$$(2)\qquad \begin{cases} aa' = 2R \sin a \\ bb' = 2R' \sin b. \end{cases}$$

Divisant ces deux équations et tenant compte de (1), il vient :

$$aa' = bb', \text{ C. Q. F. D.}$$

Ernest Foucart.

On donne un triangle abc *et un point* o *de son plan. Extérieurement au triangle* aob, *on mène la bissectrice de l'angle* aob; *cette droite coupe* ab *en un certain point. On a de même des points sur* ac *et* bc. *Démontrer que ces trois points sont en ligne droite.* **(Mannheim).**

Soit c' le point obtenu sur ab. On a $\frac{c'b}{c'a} = \frac{ob}{oa}$.

De même, $\frac{a'c}{a'b} = \frac{oc}{oa}$, $\frac{b'a}{b'c} = \frac{oa}{oc}$.

D'où en multipliant $\frac{c'b}{c'a} \cdot \frac{a'c}{a'b} \cdot \frac{b'a}{b'c} = 1$.

Cette égalité établit la proposition. **Ernest Foucart.**

La médiane bm *d'un triangle donné* abc *est rencontrée en* d *par la perpendiculaire élevée, à* ab, *au milieu de ce côté : on mène la droite* ad. *De même, on a une droite* ce *qui joint* c *au point où* bm *est rencontrée par la perpendiculaire à* bc *élevée au milieu de ce côté.*

Les droites ad *et* ce *se coupent en* o. *Démontrer que les droites* bo, bm *sont également inclinées sur* ba *et* bc. **(Mannheim).**

Soit m' le point où ob coupe ac.

Soit $\widehat{mba} = \widehat{bao} = \alpha$, $\widehat{mbc} = \widehat{bco} = \beta$.

Posons $\widehat{oba} = x$, $\widehat{obc} = y$.

Les équations oab, ocb donnent :

$$\frac{ob}{\sin\alpha} = \frac{ab}{\sin\widehat{m'oa}}, \quad \frac{ob}{\sin\beta} = \frac{bc}{\sin\widehat{m'oc}}.$$

D'où

$$\frac{\sin\widehat{m'oa}}{\sin\widehat{m'oc}} = \frac{ab}{bc}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{1}$$

L'égalité des surfaces des triangles mab, mca donne d'ailleurs

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{bc}{ab}.$$

(1) devient alors $\sin\widehat{m'oa} = \sin\widehat{m'oc}$,

ou $\widehat{m'oa} = \widehat{m'oc}$.

Or $m'oa = 180^\circ - (\alpha + x)$, $m'oc = 180^\circ - (\beta + y)$.

D'où $\alpha + x = \beta + y$.

D'ailleurs $x + y = \alpha + \beta$.

La résolution de ces équations donne $x = \beta$, $y = \alpha$. C. Q. F. D.

Ernest Foucart.

Le point o *est le centre du cercle circonscrit au triangle* abc *et* a', b' *sont les pieds des hauteurs de ce triangle, issues de* a, b :

1° aob', boa' *sont équivalents*; 2° *Le triangle* aob *et le quadrilatère* oa'cb' *sont équivalents*? **(Mannheim).**

Soient les côtés du triangle abc, A, B, C; $b'c = \mathrm{C}\cos a$. L'angle $baa' = oac = 90 - b$. La surface du triangle $ob'a = \frac{\mathrm{BC}\cos a\cos b}{2}$; de même, la surface du triangle $boa' = \frac{\mathrm{BC}\cos b\cos a}{2}$. Comme les expressions des surfaces des triangles sont identiques, les triangles sont équivalents. $ob'a = boa'$. La surface du triangle $oab = \frac{\mathrm{R}^2\sin 2c}{2} = \mathrm{R}^2\sin c\cos c$. Comme le triangle aoc est isoscèle, les angles à la base sont égaux à

$90 - a$, $a'c = B \cos c$, et $b'c = A \cos c$; et la quadrilatère $o'bca'$ est formée de deux triangles $ob'c$ et $oa'c$; l'angle $ocb' = 90 - b$; la surface des quadrilatères sera donc $\frac{RA\cos c\cos b}{2} + \frac{RB\cos c\cos a}{2} = R\cos c\left(\frac{A\cos b}{2} + \frac{b\cos a}{2}\right)$.
Mais $\frac{A}{\sin a} = 2R$, d'où $A = 2R \sin a$, de même $B = 2R \sin b$.

La surface des quadrilatères aura pour expression

$$R^2 \cos c(\sin a \cos b + \cos a \sin b) = R^2 \cos c(\sin a + b);$$

mais comme $a + b = 180 - c \sin(a + b) \sin c$. En substituant au lieu de $\sin(a + b)$ sa valeur, nous aurons finalement $R^2 \cos c$. Les expressions des surfaces du quadrilatère $oa'cb'$ et du triangle oab étant identiques, le triangle aob est équivalent au quadrilatère $oa'cb'$. **N. Plakhowo.**

Étant donné un triangle ABC, *le cercle exinscrit dans l'angle* A *a son centre en* O_a *et touche le côté* BC *en* A'. *Montrer que la droite* O_aA' *et les droites analogues* O_bB', O_cC' *concourent au centre du cercle circonscrit au triangle* $O_aO_bO_c$. **(E.-N. Barisien).**

Le triangle ABC est le triangle orthique $O_aO_bO_c$, car AO_a, BO_b, CO_c sont les bissectrices intérieures du triangle ABC.

On sait, d'après un théorème dû à Nagel, que les rayons qui joignent le centre du cercle circonscrit aux sommets d'un triangle donné, sont perpendiculaires aux côtés du triangle orthique correspondant; donc O_aA' étant perpendiculaire à BC doit passer par le centre du cercle circonscrit à $O_aO_bO_c$, il en sera de même pour O_bB', O_cC'.

Remarque. — On sait que, lorsque trois points déterminent sur les côtés d'un triangle six segments tels que la somme des carrés de trois d'entre eux non consécutifs, égale la somme des carrés des trois autres, les trois points peuvent être considérés comme étant les projections d'un même point. On voit que

$$BA' = p - c, \quad CA' = p - b, \quad AC' = p - b, \quad BC' = p - a,$$
$$CB' = p - a, \quad AB' = p - c,$$

d'où
$$\overline{BA'}^2 + \overline{AC'}^2 + \overline{CB'}^2 = \overline{CA'}^2 + \overline{BC'}^2 + \overline{AB'}^2,$$

donc les trois droites O_aA', O_bB', O_cC' concourent en un point.

Jorge-F. d'Avillez.

On mène la droite qui joint le sommet b' *d'un triangle donné* abc *au milieu de la hauteur de ce triangle, qui est issue de* a.

Cette droite coupe ac *en un point d'où l'on mène une parallèle à* ab *et l'on obtient le point* d *à la rencontre avec* bc.

De même en employant la hauteur qui part de c *on obtient un point* e *sur* ab. *Démontrer que* ed *est perpendiculaire à la médiane issue de* b.

(Mannheim).

Soit β le point où ac coupe la droite qui joint b au milieu de la hauteur ah. On a

$$\frac{bh}{bc} \cdot \frac{\beta c}{\beta a} - 1 = 1,$$

D'où
$$\frac{bd}{dc} = -\frac{\beta a}{\beta c} = \frac{bh}{bc}.$$

Par suite,

(1)
$$\frac{bd}{bc} = \frac{bh}{bh + bc} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} c + 2 \operatorname{cotg} b}.$$

On aurait de même

(2)
$$\frac{be}{ba} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} a + 2 \operatorname{cotg} b}.$$

Divisant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{bd}{be} = \frac{bc}{ba}\,\frac{\operatorname{cotg} a + 2 \operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} c + 2 \operatorname{cotg} b} = \frac{bc}{ba}\,\frac{\dfrac{\operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg} b} + 2}{\dfrac{\operatorname{cotg} c}{\operatorname{cotg} b} + 2},$$

$$\frac{bd}{be} = \frac{bc}{ba}\,\frac{\dfrac{ac}{bc}\dfrac{\cos a}{\cos b} + 2}{\dfrac{ac}{ba}\dfrac{\cos c}{\cos b} + 2} = \frac{ac \cos a + 2bc \cos b}{ac \cos c + 2ab \cos b},$$

ou enfin

(3)
$$\frac{bd}{be} = \frac{ab + bc \cos b}{bc + ab \cos b}.$$

Soit b' le milieu de bc, b'_1 sa projection sur bc. La perpendiculaire à bb' en b' coupe bc en d'. On a :

$$bd' = \frac{\overline{bb'}^2}{bb'_1} = \frac{\overline{bb'}^2}{bc - cb'_1} = \frac{\overline{bb'}^2}{bc - \dfrac{ac}{2}\cos c}.$$

ou
$$bd' = \frac{2\overline{bb'}^2}{bc + ab \cos b},$$

bd' coupe ab en e'. On aurait de même

$$be' = \frac{2\overline{bb'}^2}{ab + bc \cos b}.$$

D'où en divisant

(4)
$$\frac{bd'}{be'} = \frac{ab + bc \cos b}{bc + ab \cos b}.$$

La comparaison de (3) et (4) donne $\dfrac{bd}{be} = \dfrac{bd'}{be'}$.

Donc de est parallèle à $d'e'$, c'est-à-dire perpendiculaire à bb'. C. Q. F. D.

TROIS THÉORÈMES DE MAXIMUM

Par M. **A. Aubry.**

1. — *Lemme* I. — *Si* Am *est un nombre entier positif, on a :*

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\pm Am} \geqslant 1 \pm A,$$

cela résulte immédiatement de la relation connue :

$$1 + nx \leqslant (1 + x)^n \leqslant \frac{1}{1 - nx}.$$

2. — *Théorème* I. — *Si les quantités variables* x, y, ... z *sont liées par la relation*

$$(1) \qquad Ax + By + ... + Cz = M,$$

la fonction $x^a y^b ... z^c$ *est maximum quand on a* :

$$(2) \qquad \frac{Ax}{a} = \frac{By}{b} = ... = \frac{Cz}{c}.$$

Si la somme $\alpha a + \beta b + ... + \gamma c$ est nulle, on pourra écrire :

$$(3) \qquad 1 = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m\alpha a + m\beta b + ... + m\gamma c}.$$

Pour plus de généralité, nous supposerons les nombres a, b, ... c, α, β, ... γ fractionnaires positifs ou négatifs. Soit m un multiple commun des dénominateurs de α, β, ... γ ; les nombres $m\alpha$, $m\beta$, ... seront tous entiers, et d'après le lemme I, on aura :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m\alpha a} > (1 + \alpha)^a, \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m\beta b} > (1 + \beta)^b, ...$$

d'où, à cause de (3),

$$(4) \qquad 1 > (1 + \alpha)^a (1 + \beta)^b ... (1 + \gamma)^c.$$

Posons :

$$a + b + ... + c = S, \quad \alpha = \frac{\lambda SA}{aM}, \quad \beta = \frac{\mu SB}{bM}, ... \quad \gamma = \frac{\nu SC}{cM},$$

ce qui donnera

$$(5) \qquad a\frac{\lambda SA}{aM} + ... + c\frac{\nu SC}{cM} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \lambda A + ... + \nu C = 0,$$

la relation (4) deviendra :

$$1 > \left(\frac{aM + \lambda SA}{aM}\right)^a \left(\frac{bM + \mu SB}{bM}\right)^b ... \left(\frac{cM + \nu SC}{cM}\right)^c,$$

d'où

$$(6) \quad \left(\frac{aM}{AS}\right)^a \left(\frac{bM}{BS}\right)^b ... \left(\frac{cM}{CS}\right)^c > \left(\frac{aM}{AS} + \lambda\right)^a \left(\frac{bM}{BS} + \mu\right)^b ... \left(\frac{cM}{CS} + \nu\right)^c,$$

ce qui démontre la proposition, car les valeurs de x, y, ... z contenues dans les deux membres de (6) satisfont à (1), puisque l'on a :

$$A\frac{aM}{AS} + ... + C\frac{cM}{CS} = M, \quad A\left(\frac{aM}{AS} + \lambda\right) + ... = M,$$

de plus, les valeurs $x = \frac{aQ}{AS}$, .. satisfont à (2) : en effet, dans une suite de rapports égaux, chacun d'eux est égal à celui de la somme des numérateurs à celle des dénominateurs, ce qui donne :

$$\frac{Ax}{a} = ... = \frac{Cz}{c} = \frac{M}{S}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème a été énoncé d'abord par Cauchy (*Calc. diff.*).

Corollaire I. — Pour $A = B = ... = C = 1$, et $a = b = ... = c = 1$, on retrouve le théorème des deux moyennes, traité dans un précédent article ; on en a ainsi une démonstration nouvelle.

II. — Le maximum de $(x + \alpha)^a ... (z + \gamma)^c$ pour $Ax + ... + Cz = M$ a lieu pour

$$A\frac{x + \alpha}{a} = ... = C\frac{z + \gamma}{c},$$

puisque la somme $A(x + \alpha) + \ldots + C(z + \gamma)$ a une valeur constante $M + A\alpha + \ldots + C\gamma$.

III. — La condition $A^x B^y \ldots C^z =$ constante ramène également au théorème I, puisqu'en posant $\log A = \alpha, \ldots \log C = \gamma$, on a $\alpha x + \ldots + \gamma z =$ constante (voir des cas particeliers dans le *Recueil* de Frenet et J. E, 1877, p. 349).

IV. — Considérons le cas de deux variables, très fréquent dans les applications. On peut dire que a et b *étant quelconques, le maximum de* $x^a y^b$ *pour* $Ax + By = M$ *a lieu quand on a* :

$$\frac{Ax}{a} = \frac{By}{b} = \frac{M}{a+b}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{aM}{A(a+b)}, \quad y = \frac{bM}{B(a+b)}.$$

V. — Toutes ces propositions de maximum ont leurs corrélatives de minimum ; par exemple, le *corollaire* II donne la suivante : *le produit* $(x+\alpha)^a \ldots (z+\gamma)^c$ *étant constant, le minimum de* $Ax + \ldots + Cz$ *a lieu pour*

$$A\frac{x+\alpha}{a} = \ldots = C\frac{z+\gamma}{c}.$$

Cette observation s'applique également à ce qui suit :

2. — *Lemme* II. — *Selon que le nombre* m *est* $\gtrless 1$, *on a* :

$$(1+x)^m \gtrless 1 + mx, \quad (x > -1.$$

(Voir notre précédent article).

3. — *Théorème* II. — *Les variables* x, y, ... z *étant liées par la relation* $x^\alpha y^\beta \ldots z^\gamma =$ constante, *la fonction* $(1+x)^a (1+y)^b \ldots (1+z)^c$ *passe par un maximum quand on a en outre*

$$(7) \qquad \frac{a}{\alpha}\frac{x}{1+x} = \frac{b}{\beta}\frac{y}{1+y} = \ldots = \frac{c}{\gamma}\frac{z}{1+z}.$$

Ecrivons l'égalité :

$$(8) \qquad (A+\lambda)^\alpha (B+\mu)^\beta \ldots (C+\nu)^\gamma = A^\alpha B^\beta \ldots C^\gamma,$$

ce qui exige que certains des nombres $\lambda, \mu, \ldots \nu$, soient positifs et d'autres négatifs. Si on a :

$$(9) \qquad \frac{a}{\alpha}\frac{A}{1+A} = \frac{b}{\beta}\frac{B}{1+B} = \ldots = \frac{c}{\gamma}\frac{C}{1+C},$$

(8) peut s'écrire, en divisant par $A^\alpha \ldots C^\gamma$,

$$\left[\left(1+\frac{\lambda}{A}\right)^{\frac{A}{1+A}}\right]^a \left[\left(1+\frac{\mu}{B}\right)^{\frac{B}{1+B}}\right]^b \ldots \left[\left(1+\frac{\nu}{C}\right)^{\frac{C}{1+C}}\right]^c = 1.$$

Les nombres A, B, ... C étant positifs et $\frac{\lambda}{A}, \frac{\mu}{B}, \ldots \frac{\nu}{C}$ supérieurs à -1, les nombres $\frac{A}{1+A}$, seront positifs et < 1 : il vient donc, d'après le lemme II, $\left(1+\frac{\lambda}{1+A}\right)^a \left(1+\frac{\mu}{1+B}\right)^b \ldots \left(1+\frac{\nu}{1+C}\right)^c > 1$,

ou bien

$$(1+A+\lambda)^a (1+B+\mu)^b \ldots (1+C+\nu)^c > (1+A)^a (1+B)^b \ldots (1+C)^c.$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. — Changeons x en $\frac{x + A'}{A'' - A'}$, y en $\frac{y + B'}{B'' - B'}$, ... le théorème sera généralisé ainsi : *les variables* x, ... z *étant liées par la relation*

$$(x + A')^{\alpha} \dots (z + C')^{\gamma} = \text{constante},$$

la fonction $(x + A'')^a \dots (z + C'')^c$ *passe par un maximum quand on a* :

$$\frac{a}{\alpha}\frac{x + A'}{x + A''} = \dots = \frac{c}{\gamma}\frac{z + C'}{z + C''}.$$

II. — Si les nombres $\alpha, \beta, \dots \gamma, a, b, \dots c$ sont tous égaux à l'unité, on retrouve le théorème de MM. Desboves et Mausion (voir notre précédent article), dont on a ainsi une nouvelle démonstration.

4. — *Théorème* III. — *La moyenne arithmétique des premières puissances de* n *nombres positifs est plus grande que la première puissance de la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres.*

Appelons ε la somme des n nombres $a, b, \dots l$; on aura :

$$\left(1 + \frac{na - \varepsilon}{\varepsilon}\right)^p + \left(1 + \frac{nb - \varepsilon}{\varepsilon}\right)^p + \dots + \left(1 + \frac{nl - \varepsilon}{\varepsilon}\right)^p$$

$$> \left(1 + p\,\frac{na - \varepsilon}{\varepsilon}\right) + \dots + \left(1 + p\,\frac{nl - \varepsilon}{\varepsilon}\right) = n$$

$$\frac{a^p + \dots + l^p}{n} > \left(\frac{a + \dots + l}{n}\right)^p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème, proposé dans le tome IV de la C. M. (1828), y a été résolu par Lobato, au moyen de la formule du binôme et par Bobillier, par le calcul différentiel. M. Desboves (*Quest. d'Al.*, 1873), le démontre aussi par la même formule, mais autrement. Toutes ces démonstrations sont fort compliquées (voir par exemple J. S. 1884, p. 31).

5. — *Théorème* IV. — Plus généralement, *m étant un nombre quelconque plus grand que* 1, *la fonction* $u = \alpha x^m + \dots + \gamma z^m$ *de variables positives liées par la relation*

$$Ax + \dots + Cz = M,$$

passe par un minimum quand on a en outre

(10) $$\frac{\alpha x^{m-1}}{A} = \dots = \frac{\gamma z^{m-1}}{C}.$$

Appelons t la valeur commune de ces rapports (10), on pourra écrire ;

(11) $$t = \frac{\alpha x^m}{Ax} = \dots = \frac{\gamma z^m}{Cz} = \frac{u}{M},$$

d'où, tirant les valeurs de $x, \dots z$, les introduisant dans l'expression de M en posant :

(12) $$\sqrt[m-1]{\frac{A^m}{\alpha}} + \dots + \sqrt[m-1]{\frac{C^m}{\gamma}} = N,$$

il vient $$N\sqrt[m]{t} = M.$$

On voit que si les relations (10) sont satisfaites, on a

(13) $$u = Mt = \frac{M^m}{N^{m-1}}.$$

Or, les nombres $x, y, \dots z$ et $a, b, \dots c$ étant positifs, on a

(14) $$a\left(1 + \frac{x - av}{av}\right)^m + \dots + c\left(1 + \frac{z - cv}{cv}\right)^m > a + \dots + c + m\,\frac{x - av + \dots + z - cv}{v}$$

d'où, si $v = \frac{x + ... + z}{a + ... + c}$, et après réduction

(15) $$\frac{x}{a^{m-1}} + ... + \frac{z^m}{c^{m-1}} \geqslant \frac{(x + ... z)^m}{(a + ... c)^{m-1}}.$$

Changeons $x, ... z$ en $Ax, ... Cz$ et posons

$$a^{m-1} = \frac{A^m}{\alpha}, ... \quad C^{m-1} = \frac{C^m}{\gamma}$$

la relation (15) deviendra $$u \geqslant \frac{M^m}{N^{m-1}}.$$

Corollaire I. — Changeons x en x^g et m en $\frac{f}{g}$, on pourra dire que *la fonction* $\alpha x^f + ... + \gamma z^f$ *entre les variables* $x, ... z$ *liées par la relation* $Ax^g + ... + Cz^g = M$, *passe par un minimum quand on a*

$$\frac{\alpha x^{f-g}}{A} = ... = \frac{\gamma z^{f-g}}{C}$$

f *désignant un nombre quelconque supérieur au nombre positif* g.

II. — *Soit à trouver le minimum de* $\alpha(1 + x)^m + ... + \gamma(1 + z)^m$, *les variables étant liées par la relation* $a^x ... c^z = M$. En posant $\log a = A, ... \log c = C$, $\log M = \mu$, la relation de condition donne

$$A(1 + x) + ... + C(1 + z) = \mu + A + ... + C = \text{const}^{\text{te}}.$$

On est ramené au théorème IV.

III. — Considérons spécialement le cas de deux variables x, y. On a

(16) $$\alpha x^m + \beta y^m \geqslant \frac{(Ax + By)^m}{\left(\sqrt[m-1]{\frac{A^m}{\alpha}} + \sqrt[m-1]{\frac{B^m}{\beta}}\right)}$$

d'où on conclut : 1° que *si* $Ax + By$ *a une valeur constante, l'expression* $\alpha x^m + \beta y^m$ *est minimum quand on a*

(17) $$\frac{\alpha x^{m-1}}{A} = \frac{\beta y^{m-1}}{B}$$

et 2° que *si l'expression* $\alpha x^m + \beta y$ *est constante, le maximum de* $Ax + By$ *a lieu de même pour* (17).

IV. — Le maximum ou le minimum de $\alpha x + \beta y$ ayant lieu en même temps que celui de $\alpha B(x + a) + \beta(y + b)$, on peut dire que *si* $A\sqrt[m]{x + a} + B\sqrt[m]{y + b} = \text{const}^{\text{te}}$, $\alpha x + \beta y$ *est minimum pour*

$$\alpha B(x + a)^{\frac{m-1}{m}} = \beta A(y + b)^{\frac{m-1}{m}};$$ et inversement, que *dans le même cas, si l'expression* $\alpha x + \beta y$ *a une valeur constante, la valeur de la fonction* $A\sqrt[m]{x + a} + B\sqrt[m]{y + b}$ *passe par un maximum.*

Soit donné un triangle de côtés a, b, c *tel, que le centre de gravité est sur la circonférence du cercle inscrit*; r *étant le rayon de ce cercle* r_a, r_b, r_c *les rayons des cercles exinscrits,* p *le demi-périmètre et* S *l'aire du triangle, démontrer les relations* :

$$\frac{p^2}{r'_1} = r_a + r_b + r_c \qquad S = \frac{2r}{p}(ar_br_c + br_ar_c + cr_ar_b)$$

$$\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{p}{2r}.$$ **Jorge F. d'Avillez.**

Démonstration. — Dans un triangle quelconque, I étant le centre d'un cercle inscrit et G le centre de gravité, on a :

$$GI = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr),$$

R étant le rayon du cercle circonscrit.

Dans le cas que nous considérons, on doit avoir $GI = r$

donc $$p^2 = 4r(4R + r).$$

Or, on sait que $$4R + r = r_a + r_b + r_c.$$

donc $$\frac{p^2}{4r} = r_a + r_b + r_c.$$

On sait que dans un triangle quelconque $S = \dfrac{ar_br_c}{r_b + r_c}$

donc $$r_b + r_c = \frac{ar_br_c}{S}$$

et de même $$r_a + r_c = \frac{br_ar_c}{S}, \quad r_a + r_b = \frac{cr_ar_b}{S}.$$

On aura alors : $r_a + r_b + r_c = \dfrac{ar_br_c + br_ar_c + cr_ar_c}{rS}$

et, d'après (1) $$S = \frac{2r}{p^2}(ar_br_c + br_ar_c + cr_ar_b).$$

De la formule connue :

$$\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a + r_b + r_c}\right) = 4,$$

on déduit : $$\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{4(r_a + r_b + r_c)}{a+b+c},$$

donc $$\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{p}{2r}.$$

Jorge F. d'Avillez.

Soit donné un carré ABCD *de côté* a *et de centre* O; *soient respectivement* α, β, γ, δ *les milieux des droites* OA, OB, OC, OD, *et* M, N, P, L *les milieux des côtés* AB, BC, CD, DA. *Si l'on décrit de ces points comme centres huit cercles* K *de rayon* $\frac{a}{4}$, *démontrer que :*

1. *Le cercle* Δ *qui coupe les quatre premiers suivant des diamètres, coupe les quatre autres orthogonalement*; *si* r, R, *sont les rayons des cercles tangents aux quatre premiers et* r', R' *les rayons des cercles tangents aux quatre autres,* ρ *étant le rayon de* Δ, *on a* :

$$\rho^2 = 3Rr = R'r', \quad R^2 + r^2 + R'^2 + r'^2 = a^2.$$

2. *Les cordes communes au cercle* Δ *et à deux cercles consécutifs* K *se coupent en un point. On a ainsi huit points qui sont les sommets d'un octogone dont la surface est égale à* $\frac{11a^2}{16}$.

Jorge F. d'Avillez.

Démonstration. — 1. En effet, le point M par exemple est le centre radical des cercles qui ont pour centres α et β et du cercle Δ, donc, le cercle de centre M est orthogonal à ces trois cercles, et Δ est orthogonal

aux quatre cercles K qui ont pour centres les milieux des côtés. Le rayon de Δ est facile de trouver ; on a, en effet :

$$\rho^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{2a^2}{16} = \frac{3a^2}{16},$$

On a aussi $$r = \frac{a}{4}\sqrt{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}(\sqrt{2} - 1),$$

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{2} + \frac{a}{4} = \frac{a}{4}(\sqrt{2} + 1),$$

donc $$\rho^2 = 3Rr.$$

On trouve aussi $$r' = \frac{a}{4}, \quad R' = \frac{3a}{4},$$

donc $$R'r' = \rho^2,$$

et $$r^2 + R^2 + r'^2 + R'^2 = a^2.$$

2. Considérons, par exemple, les cercles de centres α et M. Les cordes communes aux deux cercles et à Δ se coupent évidemment en un point X_1, milieu de αM ; de même les cordes communes aux cercles qui ont pour centres M et β et au cercle Δ, se coupent en un point X_2 milieu de βM. On trouve ainsi les points X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 sommets d'un octogone, où l'on a $$X_1X_2 = X_3X_4 = X_5X_6 = X_7X_8 = \frac{a}{4},$$

$$X_2X_3 = X_4X_5 = X_6X_7 = X_8X_1 = \frac{a}{4}\sqrt{2}.$$

On a donc $$OX_1X_2 = \frac{a}{8} \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3a^2}{64}$$

$$OX_2X_3 = \frac{a}{8}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a^2}{8}.$$

L'aire de l'octogone étant égale à quatre fois l'aire du triangle OX_1X_2 plus quatre fois l'aire du triangle oX_2X_3, elle a pour valeur :

$$\frac{11a^2}{16}.$$

J. F. d'Avillez.

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE St-CYR

370. Mathématiques. — Etant donné un triangle ABC, on prend sur les côtés trois points A′, B′, C′, tels qu'on ait :

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = m,$$

et on demande :

1° De prouver que les trois triangles B′AC′, C′BA′, A′CB sont équivalents, en déterminant le rapport de leurs aires à celle de ABC ;

2° De trouver, en fonction de m, l'aire de A′B′C′ ;

3° De déterminer la valeur de m pour laquelle ce triangle est minimum ;

4° De trouver le lieu géométrique du point où se rencontrent les parallèles menées par A′ et C′ aux droites BA et AC.

371. Epure. — Un tétraèdre régulier ABCS dont les côtés sont égaux à 15 centimètres, a son côté AB parallèle au petit côté de la feuille et à 10 centimètres au-dessous du centre de la feuille. Le plan de sa base a une pente de $\frac{1}{4}$ et le côté AB est dans le plan de cote zéro. Un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est de 15°, a pour sommet le point de concours des hauteurs du triangle ABC et pour axe la hauteur du tétraèdre partant du sommet S.

On demande de représenter l'intersection du tétraèdre et du cône et l'on supposera enlevée la portion du tétraèdre comprise dans l'intérieur du cône.

On déterminera la tangente en un point de l'intersection.

372. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle, connaissant : $a = 4\,682^m,26$; $B = 23°32'54'',28$; $h_a = 2\,856^m.78$.

373. Questions posées à l'oral. 1° *Mathématiques.* — On donne dans un trapèze isoscèle les bases a et b et la longueur commune e des côtés non parallèles. On demande de calculer le rayon du cercle circonscrit.

— Etant donné un triangle ABC, trouver les distances aux

trois côtés d'un point M placé à l'intérieur du triangle et tel que les surfaces des triangles MBC, MCA, MAB soient dans des rapports donnés.

— Démontrer que l'équation $\frac{a^2}{x-p} + \frac{b^2}{x-q} - 1 = 0$ a toujours ses racines réelles, quelles que soient les constantes a, b, p et q.

— Dans un triangle donné A, B, C, exprimer la longueur de la bissectrice de l'angle A au moyen des lignes trigonométriques de cet angle et des longueurs b, c, des côtés qui le comprennent.

— Quelle est la plus petite valeur que peut prendre l'expression :

$$3x^2 - 8x + 7$$

quand on attribue à x des valeurs réelles?

— Quel est, de tous les cônes inscrits dans une sphère, celui dont la surface latérale est maximum?

— Partager une droite a en deux parties x et y telles que $x^2 + 3y^2$ ait la plus petite valeur possible; et donner l'expression de cette valeur.

— Déterminer les valeurs de x qui satisfont à l'équation :

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x.$$

2° *Physique et Chimie.* — Parler du microscope composé. Où doit-on placer l'œil pour y concentrer le plus de rayons lumineux possible? Comment mesure-t-on expérimentalement le grossissement?

— Quel est le principe général d'après lequel on détermine la chaleur spécifique des corps? Qu'entend-on par calorie?

— Quelles sont les causes qui influent sur la température de fusion des corps? Lois générales de la fusion. Comment détermine-t-on la chaleur de fusion des corps?

— Métallurgie du fer. Des différentes sortes de fontes et d'aciers. Qu'est-ce que le convertisseur Bessemer?

— Quelles sont les analogies entre le soufre et l'oxygène? entre l'azote et le phosphore?

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

374. Mathématiques. — Une personne qui fait 104 pas par minute, et qui sait qu'elle fait en moyenne 117 pas pour

un hectomètre, a employé $4'52''\frac{1}{2}$ à traverser, suivant la diagonale, une place publique carrée. Quelle est la surface du carré? Quel en est le côté?

— Chasser les radicaux du dénominateur de l'expression :

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}}.$$

375. Physique. — On a un récipient d'une capacité de 20 litres et qui est rempli d'air sec à la pression de 650 millimètres et à la température de 100°. On le met en communication avec un ballon de 12 litres de capacité à la température de 15° et qui contient de l'air sec à la pression de 800 millimètres. On demande quelle est la pression finale du mélange et quel en est le poids.

376. Calcul logarithmique. — Calculer avec une approximation de 0,0001 l'expression :

$$x=\frac{\pi}{\sqrt[3]{\pi}\times\sqrt[5]{2,4852}}.$$

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

377. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Etudier les variations de :

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+7x+12}.$$

(*Au choix*). — *a*) Enoncer et démontrer les théorèmes qui conduisent à la détermination du volume de la sphère.

b) Enoncer et démontrer les théorèmes qui permettent de déterminer le volume du tronc de cône à bases parallèles.

c) Résumer les théorèmes relatifs aux propriétés des trièdres.

378. Physique. (*Obligatoire*). — Un corps solide est immergé complètement dans un liquide et y subit une poussée p, le tout étant à la température t. La température devenant t', la nouvelle poussée est p'. Connaissant le coefficient de dilatation cubique c du solide et le coefficient de dilatation m du liquide,

calculer le rapport $\frac{p'}{p}$ et chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce rapport soit égal à 1.

(*Au choix*). — *a*) Construction des thermomètres. Echelles thermométriques.

b) Détermination des foyers dans les lentilles convergentes. Discussion.

c) Dispersion. Spectre solaire.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

379. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Etudier quelles sont les limites entre lesquelles x doit être compris pour que l'expression

$$\frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)}$$

soit positive.

(*Au choix*). — *a*) Détermination du nombre π.

b) Volume du triangle tournant.

c) Similitude des triangles.

380. Physique. (*Obligatoire*). — On gonfle un aérostat avec du gaz d'éclairage de densité 0,55, sous la pression de 755 millimètres et à la température de 10°. Le poids mort de l'aérostat et de ses accessoires est de 4 tonnes. On demande quel devrait être le volume de l'aérostat pour que la force ascensionnelle fût de 1 tonne.

Si, au lieu de gaz d'éclairage on employait de l'hydrogène de densité, 0,07, que devrait être ce volume pour la même force ascensionnelle ?

(*Au choix*). — *a*) Densité des solides et des liquides.

b) Effets divers des piles. Electrolyse.

c) Dilatation des gaz.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

381. Arithmétique. — Un capitaliste place sa fortune à 4 %; deux ans après, il retire $\frac{1}{4}$ du capital et laisse le reste porter intérêt pendant sept mois ; après ce temps, il retire encore le $\frac{1}{4}$ du

capital qui restait alors placé et laisse le capital ainsi diminué pendant treize mois. Le total des intérêts simples s'est élevé depuis l'origine du placement à 24 375 francs. Quel était le capital primitif?

382. Géométrie. — Construire un triangle connaissant les trois hauteurs.

383. Calcul logarithmique. — Calculer :

$$x = \sqrt[5]{3 \times \sqrt[4]{\frac{1}{4\sqrt{2\,367}}}}.$$

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

384. Arithmétique. — On demande le prix de revient, dans la place de Boulogne-sur-Mer, de 7 500 kilogrammes d'essence de térébenthine, provenant de Rotterdam d'après les données suivantes : le vendeur accorde une tare de 11 $^0/_0$ sur le poids brut, puis une première remise de 1 $\frac{1}{2}$ $^0/_0$ sur le poids réduit, et une deuxième remise de 1 $^0/_0$ sur le nouveau poids réduit en raison de l'importance de la livraison ; le prix de vente est de 23 florins les 50 kilogrammes de poids net, moins un escompte de 1 $^0/_0$ pour le paiement au comptant. Les frais de transport augmentent le prix d'achat de 1 $\frac{1}{2}$ $^0/_0$, et l'acheteur doit payer sur le total une commission de 1 $\frac{1}{4}$ $^0/_0$; enfin, le change entre la Hollande et la France est au cours de 210 francs pour 100 florins courants.

385. Géométrie. — Un chemin de fer traverse un terrain horizontal sur un remblai ayant 6 mètres de hauteur, 8 mètres de largeur au sommet, et des talus dont la pente descend de 3 mètres pour 4 mètres de base. On demande combien ce remblai, sur chaque kilomètre de longueur, a exigé de mètres cubes de terre.

386. — Résoudre le système d'équations :

$$y - z = \frac{1}{x}; \quad x - z = \frac{1}{y}; \quad x - y = \frac{1}{z}.$$

387. Calcul logarithmique :

$$x = 0{,}0097631 \sqrt[3]{\frac{(0{,}89765)^2}{2\sqrt{3{,}8973}}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

I. — SOLUTIONS AUX QUESTIONS PROPOSÉES

Soit G, O, I, H *le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit et l'orthocentre d'un triangle* ABC. *Calculer les aires des triangles* IOG, IHG *et* IOH. **E.-N. Barisien.**

L'aire d'un triangle formé par trois points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) d'un triangle ABC dont l'aire est S, est donnée par la formule :

$$\Sigma = \frac{abc}{8S^2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Pour les trois points I(r, r, r), O(R cos A, R cos B, R cos C) et H(2R cos B cos C, 2R cos A cos C, 2R cos B cos A), on aura ;

$$\text{IOH} = \frac{abc}{8S^2} \begin{vmatrix} r & r & r \\ R\cos A & R\cos B & R\cos C \\ 2R\cos B\cos C & 2R\cos A\cos C & 2R\cos A\cos B \end{vmatrix},$$

ou
$$\text{IOH} = \frac{abc.2rR^2}{8S^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \cos B\cos C & \cos A\cos C & \cos A\cos B \end{vmatrix},$$

et encore :

$$\text{IOH} = \frac{abc.2rR^2}{8S^2} [\cos^2 B\cos A + \cos^2 A\cos C + \cos^2 C\cos B$$
$$- \cos^2 B\cos C - \cos^2 C\cos A - \cos^2 A\cos B],$$

donc, en effectuant quelques réductions faciles, on trouve :

$$\text{IOH} = \frac{R^3 r}{S} (\cos A - \cos B)(\cos B - \cos C)(\cos C - \cos A).$$

Or,

$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B-A}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$

$$\cos B - \cos C = 2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}$$

$$\cos C - \cos A = 2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A-C}{2}$$

donc

$$\text{IOH} = \frac{8R^3 r}{S}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A-C}{2}.$$

Mais
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos = \frac{p}{4r},$$

donc finalement :

$$\text{IOH} = 2R^2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-C}{2},$$

formule due à M. P. Sondat.

Nous avons $$\mathrm{IOH} = 3.\mathrm{IOG} = \frac{3}{2}\,\mathrm{IHG},$$

donc $$\mathrm{IOG} = \frac{2}{3}\,\mathrm{R}^2 \sin\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2} \sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} \sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{2},$$

$$\mathrm{IHG} = \frac{4}{3}\,\mathrm{R}^2 \sin\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2} \sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} \sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{2}.$$

Jorge F. d'Avillez

NOTE SUR CETTE QUESTION

L'aire OIH peut aussi être donnée par la formule :

$$\mathrm{IOH} = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r},$$

due également à M. Sondat et que l'on déduit facilement de la formule (1). En effet, on a :

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{C}}{2}},$$

$$\frac{a-c}{b} = \frac{\sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{B}}{2}},$$

donc

$$\sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} \sin\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2} \sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{2} = \frac{(b-c)(a-b)(a-c)\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}{abc}.$$

Or $$\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2} = \frac{p}{4\mathrm{R}}$$

$$abc = 4\mathrm{R}rp,$$

donc, en substituant dans (1)

$$\mathrm{IOH} = \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{8r}.$$

On trouve aussi une expression de cette aire en fonction des hauteurs, en remarquant que

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2\mathrm{S}.$$

On a alors : $$b-c = 2\mathrm{S}\,\frac{h_c-h_b}{h_bh_c}$$

$$a-c = 2\mathrm{S}\,\frac{h_c-h_a}{h_ah_c}$$

$$a-b = 2\mathrm{S}\,\frac{h_b-h_a}{h_ah_b},$$

donc $$\mathrm{IOH} = \frac{8\mathrm{S}^3}{8r} \times \frac{(h_c-h_b)(h_c-h_a)(h_b-h_a)}{h_a{}^2h_b{}^2h_c{}^2}.$$

Mais $$S = \sqrt{\frac{1}{r} R h_a h_b h_c},$$

donc $$h^2_a h^2_b h^2_c = \frac{4S^4}{R^2}.$$

On a alors :

$$IOH = \frac{R^2}{4rS} (h_c - h_b)(h_c - h_a)(h_b - h_a).$$

On peut obtenir directement les expressions trigonométriques des aires IOG et IHG que nous avons donné ci-dessus. En effet, les coordonnées de G étant $\frac{2S}{3a}$, $\frac{2S}{3b}$, $\frac{2S}{3c}$, on trouve :

$$IOG = \frac{R^2 r}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

$$IHG = \frac{2R^2 r}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos B \cos C & \cos A \cos C & \cos A \cos B \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

d'où l'on déduit les formules indiquées.

Jorge F. d'Avillez.

Les tangentes en A, B, C *au cercle circonscrit à un triangle* ABC, *rencontrent les côtés* BC, CA, AB *respectivement en* A_1, B_1, C_1. *Montrer que les points* A_1, B_1, C_1 *sont en ligne droite.* (**E.-N. Barisien**).

Le cercle circonscrit a pour équation trilinéaire

$$ayz + bxz + cxy = 0$$

que l'on peut écrire $$z(ay + bx) + cxy = 0.$$

La droite $$ay + bx = 0$$

doit rencontrer le cercle en deux points situés sur les côtés BC et CA représentés par $x = 0$, $y = 0$. Passant par le point d'intersection de ces droites elle est tangente en C au cercle.

On a de même, pour les tangentes en B et A,

$$cx + az = 0 \quad bz + cy = 0.$$

On peut donc écrire

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0 \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

Donc les trois points où les tangentes rencontrent les côtés opposés sont sur la droite $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

Remarques. — Si au lieu d'un cercle, on a une conique circonscrite, le théorème est également vrai ; on peut le démontrer, de la façon suivante employée par M. Carnoy dans son *Cours de Géométrie Analytique.*

Représentons par

$$P_1 = 0 \quad P_2 = 0 \quad P_3 = 0 \quad F_1 = 0 \quad F_2 = 0 \quad F_3 = 0$$

les équations des côtés et des tangentes aux sommets opposés.

La conique sera représentée par

$$lF_1F_2 + mP_3^2 = 0$$

ou par $$l'P_1P_2 + m'P_2F_3 = 0$$

ou, par les équations équivalentes

$$lF_1F_2 + l'P_1P_2 = 0 \quad P_3(mP_3 + m'F)_3 = 0.$$

La première donne le côté P_3 qui passe par (F_1, P_2), (F_2, P_1) et la droite qui passe par (F_1, P_1), (F_2, P_2). Comme cette dernière droite doit coïncider avec $$mP_3 + m'F_3 = 0$$ les trois points d'intersection des tangentes avec les côtés opposés sont en ligne droite.

Ce théorème est d'ailleurs un cas particulier du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit. La droite qui passe par les points d'intersection est la droite de Pascal du triangle.

Dans le cas du cercle inscrit à un triangle, le point de Brianchon est le point de Gergonne du triangle. **Jorge F. d'Avillez.**

Soient : A', B', C' *les pieds des bissectrices intéreures d'un triangle* ABC, Σ *l'aire du triangle ayant pour sommets les milieux de* AA', BB', CC', 2p *le périmètre et* R *le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC. *Démontrer les relations*

$$\frac{AA'.BB'.CC'}{AB'.BC'.CA'} = \frac{2p}{R} \qquad \Sigma = \frac{AA'.BB'CC'}{16p}.$$

(E.-N. Barisien).

On sait que $$AA'.BB'.CC' = \frac{8abcpS}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

S étant l'aire du triangle ABC.

D'autre part, on a

$$AB' = \frac{bc}{a+c} \quad BC' = \frac{ca}{a+b} \quad CA' = \frac{ab}{b+c}$$

donc $$AB'.BC'.CA' = \frac{a^2b^2c^2}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

d'où $$\frac{AA'.BB'.CC'}{AB'.BC'.CA'} = \frac{8pS}{abc} = \frac{2p}{R}.$$

Nous avons démontré dans le *J. de Math. Élem.*, p. 195, 22ᵉ année, que

$$\Sigma = \frac{abcS}{2(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Or,

$$\frac{AA'.BB'.CC'}{16p} = \frac{16p(b+c)(c+a)(a+b)}{8abcpS} = \frac{abcS}{2(b+c)(c+a)(a+b)}$$

donc $$\frac{AA'.BB'.CC'}{16p} = \Sigma.$$

Jorge F. d'Avillez.

Cette question a été posée dans le *J. E.*, 24ᵉ [corrigé à la main : 23] année, p. 41 et dans le *J. S.*, 23ᵉ année, p. 36, question 310.

II. — QUESTIONS DIVERSES AVEC SOLUTIONS

Soit donné un triangle quelconque ABC *et le cercle circonscrit :*

1° *Trouver deux points* X *et* Y *tels que la droite de Wallace de* X *soit perpendiculaire à l'axe orthique du triangle, et la droite de Wallace de* Y *soit parallèle au même axe.*

2° *Trouver deux autres points* X′, Y′ *tels que les droites de Wallace de ces points soient respectivement perpendiculaire et parallèle à la polaire trilinéaire du centre du cercle inscrit.*

3° *Trouver aussi deux points* X″, Y″ *tels que ses droites de Wallace soient respectivement perpendiculaire et parallèle à la droite de Lemoine.*

4° *Les six droites de Wallace, correspondantes aux trois couples de points considérés, se coupent en trois points, sommets d'un triangle inscrit au cercle des neuf points.* **(Jorge-F. d'Avillez).**

1° On sait d'après un théorème dû à M. G. Gibson (*Proceedings of the Edimburg Mathematical Society* (*), 1890), que si l'on mène, par l'orthocentre, une droite, et l'on joint les points où elle coupe les trois côtés, respectivement, aux points symétriques de l'orthocentre par rapport aux mêmes côtés, les trois droites ainsi obtenues concourent en un point situé sur le cercle circonscrit, pour lequel la droite de Wallace est parallèle à la droite menée par l'orthocentre.

Soient H ce point, O le centre du cercle circonscrit; soient H_1, H_2, H_3 les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés BC, CA, AB. Soient U, V, W les points où la droite d'Euler prolongée coupe les côtés BC, CA, AB du triangle. Les droites UH_1, VH_2, WH_3 se coupent donc en un point X qui satisfait à la condition indiquée, car, d'après le théorème ci-dessus, la droite de Wallace correspondante au point X doit être parallèle à la droite d'Euler et l'axe orthique du triangle est, comme l'on sait, perpendiculaire à cette dernière droite.

Pour trouver le point Y, il suffit de joindre X et O et de prolonger cette droite jusqu'à ce qu'elle coupe de nouveau le cercle circonscrit. Le point d'intersection Y vérifie la condition énoncée, car on sait que les droites de Wallace correspondantes aux extrémités d'un diamètre du cercle circonscrit sont rectangulaires, donc la droite de Wallace du point Y est parallèle à l'axe orthique du triangle.

2° Menons par l'orthocentre une parallèle à la droite OI qui joint le point O au centre I du cercle inscrit au triangle. La droite ainsi obtenue coupe respectivement les trois côtés BC, CA, AB en trois points U′, V′, W′. Les droites $U'H_1$, $V'H_2$, $W'H_3$ se coupent donc en un point X′, dont la droite de Wallace est parallèle à OI; la polaire trilinéaire de I étant, comme on le sait, perpendiculaire à OI, sera donc aussi perpendiculaire à

(*) Voir aussi une démonstration de ce théorème dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*, de Vuibert, 20e année, 1896, p. 122.

la droite de Wallace de X'. Le point Y' serait donc l'extrémité opposée du diamètre du cercle circonscrit qui passe par X'.

3° Si l'on mène par H une parallèle à la droite OK, K étant le point de Lemoine du triangle, cette parallèle coupe les côtés du triangle en trois points U'', V'', W''; le point X'' où se coupent les trois droites $U''H_1$, $V''H_2$, $W''H_3$ vérifie la condition indiquée, car, sa droite de Wallace est parallèle à OK et cette droite est, d'après un théorème connu, perpendiculaire à la droite de Lemoine, polaire trilinéaire du point de Lemoine K.

Le point Y'' sera le point directement opposé à X'' sur le cercle circonscrit.

4° Soient W et W_1 les droites de Wallace des points X et Y; W' et W'_1, les droites de Wallace des points X' et Y'; W'' et W''_1, les droites de Wallace des points X'' et Y''; les premières droites se coupent en un point μ; les secondes en un point μ' et les troisièmes en un point μ''.

On sait que le lieu géométrique du point d'intersection des droites de Wallace rectangulaires est le cercle des neuf points, donc les six droites de Wallace correspondantes aux trois angles de points considérés, se coupent en trois points, sommets d'un triangle inscrit au cercle des neuf points.

Jorge-F. d'Avillez.

Remarque. — J'appelle droite de Wallace et non droite de Simson celle qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point du cercle circonscrit sur les côtés d'un triangle. Dans sa note « The Wallace line and the Wallace point », publiée dans les « Proceedings of the Edinburgh Mathematical société », vol. IX, mon illustre ami, M. J.-S. Mackay, montre que Simson ne s'en est jamais occupé, et que c'est à William Wallace qu'on doit la découverte de cette ligne. M. Thomas Muir a trouvé l'indication de cette ligne dans le « Leybourn's Mathematical Repository ». D'après M. Mackay, la découverte de Wallace doit dater de 1799 ou 1800.

Jorge-F. d'Avillez.

Si AH' *est une des hauteurs du triangle* ABC, H *l'orthocentre*, I *le centre du cercle inscrit et* r *le rayon du même cercle, on a* :

$$\frac{AH}{HH'} = \frac{\overline{AI}^2 - 2r^2}{2r^2 - \overline{H'I}^2}.$$ **Jorge-F. d'Avillez.**

Démonstration. — Le théorème de Stewart, appliqué au triangle AHI', donne :

$$\overline{IH}^2 = \frac{\overline{AI}^2 \cdot HH' + \overline{IH'}^2 \cdot AH}{h} - AH \cdot HH',$$

h désignant AH'.

Or, on sait que $$\overline{IH}^2 = 2r^2 - AH \cdot HH',$$

donc $$\overline{AI}^2 \cdot HH' + \overline{IH'}^2 \cdot AH = 2r^2h = 2r^2(AH + HH').$$

On aura ainsi $$HH'(\overline{AI}^2 - 2r^2) = AH(2r^2 - \overline{IH'}^2),$$

et, finalement, $$\frac{AH}{HH'} = \frac{\overline{AI}^2 - 2r^2}{2r^2 - \overline{IH'}^2}.$$ **Jorge-F. d'Avillez.**

Si S *est l'aire*, R *le rayon du cercle circonscrit*, ω *l'angle de Brocard d'un triangle* ABC, *on a*

$$\sum (\sin 2A + 2 \sin B \sin C \cos A) = (2 + \cot \omega) \frac{S}{R^2}.$$

J. F. d'Avillez.

Démonstration. — De la formule

$$\frac{\cos A}{\sin B . \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A . \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A . \sin B} = 2,$$

donnée par M. Dupain (N. A. question 1047), on déduit :

$$\cot A \frac{\sin A}{\sin B . \sin C} + \cot B \frac{\sin B}{\sin A . \sin C} + \cot C \frac{\sin C}{\sin A . \sin B} = 2.$$

On a aussi, ω étant l'angle de Brocard,

$$\cot A + \cot B + \cot C = \cot \omega,$$

$$\sum \cot A \left(\frac{\sin B . \sin C + \sin A}{\sin B . \sin C} \right) = 2 + \cot \omega,$$

et aussi

$$\sum \cos A (\sin B . \sin C + \sin A) = (2 + \cot \omega) \sin A \sin B \sin C$$

$$= (2 + \cot \omega) \frac{S}{2R^2}.$$

On en déduit

$$\sum \left(\cos A . \sin B . \sin C + \frac{\sin 2A}{2} \right) = (2 + \cot \omega) \frac{S}{2R^2},$$

ou $$\sum (\sin 2A + 2 \sin B \sin C \cos A) = (2 + \cot \omega) \frac{S}{R^2}.$$

J. F. d'Avillez.

Soient OX, OY *deux droites concourantes quelconques*, A *un point sur* OX, B *un point sur* OY. *Si* D, E *sont les milieux de* OA, OB, *on a* :

$$4(\overline{AE}^2 - \overline{BD}^2) = 3(\overline{AO}^2 - \overline{OB}^2),$$

$$\frac{\overline{AE}^4 - \overline{BD}^4}{\overline{OA}^4 - \overline{OB}^4} = \frac{3\overline{AB}^2}{4(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2)} + \frac{3}{16}.$$

(Jorge F. d'Avillez).

Démonstration. — D'après le théorème de Stewart, on a dans le triangle OAB, $\overline{BD}^2 . OA = \overline{OB}^2 . \frac{OA}{2} + \overline{AB}^2 . \frac{OA}{2} - \frac{\overline{OA}^3}{4}$,

$$\overline{AE}^2 . OB = \overline{AB}^2 . \frac{OB}{2} + \overline{OA}^2 . \frac{OB}{2} - \frac{\overline{OB}^3}{4},$$

ou $$\overline{BD}^2 = \frac{\overline{OB}^2}{2} + \frac{\overline{AB}^2}{2} - \frac{\overline{OA}^2}{4}, \quad \overline{AE}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2} + \frac{\overline{OA}^2}{2} - \frac{\overline{OB}^2}{4}.$$

On aura donc :

(1) $$\overline{AE}^2 - \overline{BD}^2 = \frac{3}{4}(\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2).$$

On trouve aussi :

$$\overline{AE}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \frac{1}{4}(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2),$$

d'où

$$\overline{AE}^4 - \overline{BD}^4 = \frac{3}{4}\overline{AB}^2(\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2) + \frac{3}{16}(\overline{OA}^4 - \overline{OB}^4),$$

et finalement :

$$\frac{\overline{AE}^4 - \overline{BD}^4}{\overline{OA}^4 - \overline{OB}^4} = \frac{3\overline{AB}^2}{4(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2)} + \frac{3}{16}.$$

Jorge F. d'Avillez.

Dans un quadrilatère ABCD, *les angles* B *et* D *sont droits* ; *on connaît la diagonale* AC = a, *le périmètre* 2p *et la surface* S. *Déterminer les côtés* AB = x, CD = x', DA = y'.

On a les quatre équations :

(1) $$x^2 + y^2 = a^2,$$

(2) $$x'^2 + y'^2 = a^2,$$

(3) $$x + y + x' + y' = 2p,$$

(4) $$xy + x'y' = 2S.$$

Ajoutons les équations (1) et (2) au double de l'équation (4).

Nous avons ainsi :

$$(x + y)^2 + (x' + y')^2 = 2a^2 + 4S.$$

Posons :

(5) $$x + y = p + u,$$

u étant une variable auxiliaire.

On aura, d'après (3) :

(6) $$x' + y' = p - u.$$

L'équation précédente devient :

$$(p + u)^2 + (p - u)^2 = 2a^2 + 4S, \quad \text{ou} \quad 2p^2 + 2u^2 = 2a^2 + 4S.$$

On tire de là :

(7) $$u = \pm\sqrt{a^2 + 2S - p^2}.$$

Élevons les égalités (5) et (6) au carré, nous aurons, en tenant compte de (1) et de (2) :

(8) $$2xy = (p + u)^2 - a^2, \quad 2x'y' = (p - u^2) - a^2.$$

Les équations (5), (6) et (8) donnent la somme et le produit de x, y et de x', y'.

Ces inconnues sont donc racines des deux équations :

(9) $$X^2 - (p + u)X + \frac{(p - u)^2 - a^2}{2} = 0,$$

(10) $$X^2 - (p - u)X + \frac{(p - u)^2 - a^2}{2} = 0.$$

Discussion. — Les équations (9) et (10) ne diffèrent que par le signe de u. Si dans l'égalité (7) on prend la valeur de u précédée du signe +, l'équation (9) donnera, pour x et y, certaines valeurs que l'équation (10) aurait fournies pour x' et y' si l'on avait pris u avec le signe — et inversement. On peut donc convenir de prendre u avec le signe +.

Pour que la valeur de u ne soit pas imaginaire, il faut que l'on ait :

$$a^2 + 2S - p^2 \geqslant 0,$$

d'où

(α) $$2S \geqslant p^2 - a^2.$$

Revenons aux équations (9) et (10). Il faut que leurs racines soient réelles et positives pour que le quadrilatère existe.

Les conditions de réalité sont :

$$(p + u)^2 - 2(p + u)^2 + 2a^2 \geqslant 0, \quad (p - u)^2 - 2(p - u)^2 + 2a^2 \geqslant 0,$$

ce qui revient à :

(β) $$(p + u)^2 - 2a^2 \leqslant 0, \quad (p - u)^2 - 2a^2 \leqslant 0,$$

u étant positif, la première inégalité entraîne la seconde.

Pour que les racines soient positives, il faut que leur produit et leur somme soient positifs. On doit donc avoir :

(γ) $(p + u)^2 - a^2 > 0, \quad p + u > 0, \quad (p - u)^2 - a^2 > 0, \quad p - u > 0,$

u étant positif, la deuxième inégalité est toujours satisfaite, et la première rentre dans la troisième.

Les quatre conditions de possibilité sont donc, jusqu'à présent (α), (β), (γ), $(p - u)$ devant être positif d'après (γ), les deuxième et troisième conditions reviennent à :

(δ) $$u \leqslant a\sqrt{2} - p, \quad u < p - a.$$

Cette dernière condition entraîne $p - u > 0$, en sorte que les conditions de possibilité se réduisent maintenant à (α) et (δ).

Les inégalités (δ) reviennent à :

$$\sqrt{a^2 + 2S - p^2} \leqslant a\sqrt{2} - p, \quad \sqrt{a^2 + 2S - p^2} < p - a.$$

Pour que le second membre de chacune de ces inégalités soit positif comme le premier, il faut que l'on ait :

$$a < p \leqslant a\sqrt{2}.$$

Élevant au carré et simplifiant, il vient :

$$2S \leqslant (a - p\sqrt{2})^2, \quad 2S > 2p(p - a),$$

$(a - p\sqrt{2})^2$ est plus grand ou plus petit que $2p(p - a)$, suivant que p est plus petit ou plus grand que $\dfrac{a(\sqrt{2} + 1)}{2}$.

Les conditions de possibilité sont donc, en définitive :

$$a < p \leqslant a\sqrt{2}, \quad p^2 - a^2 \leqslant 2S < 2p(p - a), \quad \text{si } p < a\,\frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

$$p^2 - a^2 \leqslant 2S < (a - p\sqrt{2})^2, \quad \text{si } p < a\,\frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

Il reste à écrire les valeurs de x, y, x', y', à examiner les cas particuliers et à interpréter géométriquement les résultats de la discussion.

Déterminer cinq nombres en progression géométrique, connaissant leur somme et leur produit.

Soient a la somme et b^5 le produit donnés. Si x désigne le nombre

moyen et y la raison de la progression, on doit avoir :

(1) $$\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y} + x + xy + xy^1 = a,$$

(2) $$\frac{x}{y^2} \cdot \frac{x}{y} \cdot x \cdot xy \cdot xy^2 = b^5.$$

De (2), on déduit immédiatement :

$$x = b.$$

L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{y^2} + y^2 + \frac{1}{y} + y + 1 = \frac{a}{b}.$$

En posant : $$\frac{1}{y} + y = z,$$

on a : $$\frac{1}{y^2} + y^2 = z^2 - 2,$$

et l'équation ci-dessus devient :

$$z^2 + z - 1 - \frac{a}{b} = 0.$$

On tire de là : $$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}}.$$

Ces valeurs seront réelles quand on aura $\frac{a}{b} \geqslant -\frac{5}{4}$. Considérons d'abord la valeur positive de z. On connaît la somme z et le produit 1 des nombres y et $\frac{1}{y}$. Ces membres sont donc racines de l'équation :

$$X^2 - \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}}\right)X + 1 = 0,$$

qui, résolue, donne :

$$X = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}}\right)^2 - 1}.$$

Ces deux racines sont toujours positives, car leur produit 1 est positif, et leur somme est la valeur positive de z.

Pour que ces racines soient réelles, il faut que la quantité soumise au radical soit positive ou nulle. On doit donc avoir :

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}} \geqslant 1, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}} \geqslant \frac{5}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \geqslant 5.$$

Telle est la condition de possibilité qui se déduit de la valeur positive de z et qui correspond aux deux valeurs positives de y ; mais, si l'on prend la valeur négative de z, on aura pour z deux valeurs négatives, qui conviendront également lorsqu'on aura :

$$\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}}\right)^2 \geqslant 1.$$

ou $$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}} \geqslant 1,$$

ou $$\frac{a}{b} \geqslant 1.$$

Ainsi, lorsque $\frac{a}{b}$ est compris entre 1 et 5, il y a pour y deux valeurs négatives acceptables, et, lorsque $\frac{a}{b}$ est plus grand que 5, il y a, en outre, deux valeurs positives.

Trouver un nombre de trois chiffres sachant que le chiffre des unités est égal au produit des deux autres; que le chiffre des unités est moyen proportionnel entre les deux autres; que l'inverse du chiffre des centaines est égal à l'inverse du chiffre des dizaines augmenté de deux fois l'inverse du chiffre des unités.

Soient x, y, z, les chiffres qui désignent respectivement les unités, les dizaines et les centaines.

Les trois équations du problème sont :

(1) $$x = yz$$

(2) $$x^2 = xz$$

(3) $$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{2}{x}.$$

En multipliant membre à membre les deux premières équations, il vient : $$xy^2 = xyz^2.$$

En divisant par xy, on supprime la solution $x = y = 0$, dont il n'y a pas à tenir compte ; il reste l'équation :

$$y = z^2.$$

En remplaçant y par z^2 dans l'équation (1), on obtient :

$$x = z^3.$$

Si l'on porte maintenant dans l'équation (3) les valeurs obtenues ci-dessus pour y et x, on a : $\frac{1}{z} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3}$,

ou, en multipliant par z^3 et ordonnant,

$$z^2 - z - 2 = 0.$$

On tire de là : $$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

c'est-à-dire : $$z' = 2 \quad z'' = -1.$$

La valeur z' convient évidemment seule. On en déduit $y = 4$ et $x = 8$. Le nombre cherché est 248.

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

388. Mathématiques. — On donne un rectangle ABCD dont les côtés sont $AB = a$, $BC = b$. On prend sur le côté DC la longueur $DE = x$, et, sur le prolongement du côté BC, la même longueur $CF = x$. Déterminer x par la condition que le volume engendré par le quadrilatère AEFB tournant autour de AB soit égal au volume engendré par le rectangle ABCD tournant aussi autour de AB. Condition de possibilité du problème. Peut-on interpréter les solutions négatives?

389. Epure. — Un tétraèdre régulier a sa base sur le plan horizontal. Ses côtés sont égaux à 12 centimètres. Le centre de cette base est au centre de la feuille, et un côté AB de la base est parallèle au petit axe de la feuille. On considère le cylindre ayant pour axe le côté SA situé à gauche du centre, et un rayon de section droite égal à 6 centimètres.

On demande l'intersection de ce cylindre avec le tétraèdre.

On représentera le tétraèdre avec son entaille et on supposera le cylindre enlevé.

On déterminera la tangente en un point de l'intersection.

390. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle, connaissant : $S = 12\,344^{m},726$ $C = 23°32'48''2$
et $a + b - c = 141^{m},28$.

391. Questions posées à l'oral. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre $2p$ et la surface a^2.

— Déterminer la quantité a de manière que l'une des racines de l'équation $x^2 - \frac{15}{4}x + a^2 = 0$ soit le carré de l'autre.

— Construire un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné.

— Trouver les côtés d'un trapèze isocèle, connaissant la hauteur, le périmètre et la surface.

— Maximum et minimum de $3 \sin x + 4 \cos x$.

— Etudier les variations de la surface d'un trapèze isocèle,

circonscrit à une circonférence donnée. Indiquer dans quel cas cette surface sera minima.

— Démontrer que la relation $\frac{2\,\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^4 x} = \frac{\text{tg}^2 2x}{2+\text{tg}^2 2x}$ est une identité.

— On donne le rayon de demi-cercle ACDB. Calculer le côté CD du trapèze ACDB dans lequel la somme des bases est égale à la somme des deux autres côtés.

— Inscrire dans un cercle un triangle isocèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur.

— Résoudre l'équation :

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$$

— Résoudre le système d'équations :

$$\text{tg}\, x + \text{tg}\, y = 1 \qquad \text{tg}\,(x+y) = \frac{4}{3}.$$

— Trouver le maximum du produit $x^2(a - bx)$, dans lequel a et b représentent des nombres positifs.

— Résoudre le système :

$$2\cos x \cos y = 1 \qquad \text{tg}\, x + \text{tg}\, y = 2.$$

Trouver toutes les valeurs de x et de y satisfaisant à ces équations.

— Entre quelles limites varie la fraction : $\frac{3x^2 - 5x + 5}{2x^2 - 3x + 4}$?

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

392. Mathématiques. — Une personne a engagé sa fortune dans deux entreprises, dont l'une lui rapporte 6 % et l'autre 12 % par an. Elle retire de la première un bénéfice inférieur de 5 400 fr. à celui que lui donne la seconde et calcule que, si elle eut mis dans l'une de ces entreprises ce qu'elle a mis dans l'autre et inversement, les deux lui eussent donné un même bénéfice. Combien a-t-elle placé dans chacune?

— Chasser les radicaux des dénominateurs de l'expression :

$$\frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{\dfrac{1}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}}.$$

393. Physique. — Une pompe aspirante et foulante, de capacité C, est reliée par le tube d'aspiration à un réservoir de volume A, contenant un gaz sous pression H_0, et, par le tube de refoulement, à un réservoir de capacité B, contenant le même gaz sous pression P_0. Le piston est, au début, au bas de sa course, et la machine ne possède pas d'espace nuisible. Calculer les pressions successives $H_1, H_2, \ldots H_n$; $P_1, P_2, \ldots P_n$ dans ces deux récipients, lorsqu'on fait fonctionner la pompe.

394. Calcul logarithmique. — Simplifier, puis calculer à 0,001 près l'expression suivante :

$$z = \frac{\sqrt[5]{2(1+x)}}{2\sqrt[3]{1+x^2}}$$

sachant que $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

395. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Etudier les variations de la fonction $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$.

(*Au choix*). — *a*) Volume de la zone sphérique.

b) Détermination du nombre π.

c) Cas de similitude des triangles.

396. Physique. (*Obligatoire*). — Un vase en laiton pesant 120 grammes contient un demi-litre d'eau, 95 grammes de glace et un thermomètre à mercure. On y fait entrer de la vapeur d'eau bouillante sous la pression de $0^m,760$ et on arrête l'opération quand le poids du vase et de son contenu a augmenté de 50 grammes. Le thermomètre indique alors la température de 36°,8. Quelle est la chaleur de vaporisation de l'eau, sachant : 1° que la chaleur spécifique du laiton est 0,1 ; 2° que la chaleur de fusion de la glace est 79 ; 3° enfin que la masse du thermomètre évaluée en eau est de 5 grammes.

(*Au choix*). — *a*) Définition et mesure du grossissement d'un microscope composé.

b) Densité des gaz.

c) Détermination du nombre de vibrations d'un son.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

397. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Etudier la variation de la fonction $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1}$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

(*Au choix*). — *a*) Plus courte distance de deux droites.

b) Sections planes du cylindre.

c) Volume engendré par un triangle tournant.

398. Physique. (*Obligatoire*). — Etant donné un aérostat sphérique de 6 mètres de diamètre dont le taffetas pèse 200 grammes par mètre carré et dont la nacelle pèse en tout 10 kilogrammes, on demande : 1° quel poids peut enlever ce ballon en conservant une force ascensionnelle de 3 kilogrammes, s'il est gonflé : (*a*) de gaz d'éclairage dont la densité est 0,55 par rapport à l'air, (*b*) de gaz hydrogène pur dont la densité est 0,069 ; 2° quel prix coûtera l'ascension par kilogramme avec chacun des deux gaz? Le poids d'un litre d'air est $1^{gr},3$. Le prix d'un mètre cube d'hydrogène pur est $1^{fr},20$. Le prix du mètre cube de gaz est $0^{fr},25$.

Au choix). — *a*) Loi de Mariotte.

b) Condensateur électrique. Bouteille de Leyde.

c) Formation des foyers dans les miroirs sphériques convexes. Discussion.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

399. Arithmétique. — Deux frères ont à se partager également une succession composée d'un champ et d'une somme de 12 500 francs. Le notaire fait deux lots : l'un comprend une partie du champ pouvant être vendue comme emplacement à bâtir et valant $4^{fr},50$ le mètre carré ; l'autre comprend la somme de 12 500 francs, et le restant du champ, estimé à 2 300francs l'hectare, est d'une superficie dix fois plus grande que le terrain propre à bâtir. Les deux frères sont également partagés. On demande la contenance de chacune des deux portions du champ.

400. Géométrie. — Dans un triangle ABC, on connaît l'angle A, la somme m des deux côtés qui comprennent cet angle

et le rayon R du cercle circonscrit. Résoudre le triangle. Discuter. Application : $m = 2\sqrt{3}$, $A = 60°$, $R = 1$.

401. Calcul logarithmique. — Calculer :

$$x = \sqrt[5]{3 \times \sqrt[4]{\frac{\pi}{2,6432}}}.$$

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

402. Arithmétique. — Un capitaliste place sa fortune à 4 %; deux ans après, il retire $\frac{1}{4}$ du capital et laisse le reste porter intérêt pendant sept mois; après ce temps, il retire encore le $\frac{1}{4}$ du capital qui restait alors placé et laisse le capital ainsi diminué pendant treize mois. Le total des intérêts simples s'est élevé depuis l'origine du placement à 24 375 francs. Quel était le capital primitif?

403. Géométrie. — Un quart de cercle AOB tourne autour d'un diamètre X'X situé dans son plan et faisant avec le rayon OA un angle i. Déterminer la valeur de i, de telle sorte que le rapport des volumes engendrés par le quart de cercle et le trapèze AaBb soit égal à un nombre donné K (a et b sont les projections des points A et B sur X'X).

404. Algèbre. — Etant donné l'équation :

$$(4 + m)x^2 - 2(10 + 3m)x + 3(4 + 3m) = 0$$

trouver entre quelles limites peut varier m pour que les racines soient réelles, positives et inférieures au nombre 4.

405. Calcul logarithmique :

$$x = \sqrt[7]{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \frac{1,23506}{\sqrt[5]{2\pi \times (6,3256)^3}}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

QUESTIONS RÉSOLUES

Vérifier que si x, y, z *sont en progression arithmétique,* $x^2 + xy + y^2$, $x^2 + xz + z^2$, $y^2 + yz + z^2$ *sont aussi en progression arithmétique. Rapport des raisons.*

La différence entre la seconde et la première expression est :

$$xz + z^2 - xy - y^2 = x(z - y) + z^2 - y^2 = x(z - y) + (z - y)(z + y)$$
$$= (z - y)(x + y + z).$$

De même, la différence entre la troisième et la seconde est :

$$y^2 + yz - x^2 - xz = z(y - x) + y^2 - x^2 = z(y - x)$$
$$+ (y - x)(y + x) = (y - x)(x + y + z).$$

Ces différences sont égales, puisque, par hypothèse, $z - y = y - x$; les expressions considérées forment donc une progression par différence dont la racine est $(z - y)(x + y + z)$. La première progression ayant $z - y$ pour racine, le rapport des racines est $x + y + z$.

Résoudre l'équation :

$$\log (7x - 9)^2 + \log (3x - 4)^2 = 2.$$

Cette équation revient à :

$$2 \log (7x - 9) + 2 \log (3x - 4) = 2,$$
$$\log (7x - 9) + \log (3x - 4) = 1 = \log 10,$$
$$(7x - 9)(3x - 4) = 10, \quad 21x^2 - 55x + 26 = 0,$$

d'où :

$$x' = 2, \quad x'' = \frac{13}{21}.$$

Résoudre l'équation :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{3x}{2}.$$

Le premier membre de l'équation peut s'écrire successivement :

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}, \quad \text{ou} \quad 2 \cos \frac{x}{2}\left(\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2}\right).$$

L'équation proposée revient donc à celle-ci :

$$4 \cos \frac{x}{2} \cos x\left(\sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right) = 0,$$

qui se décompose en trois autres :

(1) $\cos \frac{x}{2} = 0$, d'où $\frac{x}{2} = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $x = (4K \pm 1)\pi$.

(2) $\cos x = 0$, d'où $x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2}$.

(3) $\sin \frac{3x}{2} = \cos \frac{3x}{2}$, d'où $\frac{3x}{2} = K\pi + \frac{\pi}{4}$, $x = (4K + 1)\frac{\pi}{6}$.

Résoudre le système :

(1) $x + y = mz$,

(2) $x^2 + y^2 = nz^2$,

(3) $x^3 + y^3 = a^3 - z^3$.

Elevons l'équation (1) au carré, et retranchons-en (2), il vient :

(4) $2xy = (m^2 - n)z^2$.

L'équation (3) peut s'écrire :

$$(x + z)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - z^3,$$

ou, en remplaçant $x + y$ et xy par les valeurs (1) et (4),

$$m^3z^3 - \frac{3}{2}m(m^2 - n)z^3 = a^3 - z^3, \quad \text{ou} \quad (3mn - m^3 + 2)z^3 = 2a^3.$$

On tire de là, en laissant de côté les racines cubiques imaginaires,

$$z = \frac{a\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3mn - m^3 + 2}}.$$

D'après les égalités (1) et (4), x et y sont racines de l'équation

$$X^2 - mzX + \frac{m^2 - n}{2}z^2 = 0,$$

qui, résolue, donne :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{z}{2}\left(m \pm \sqrt{2n - m^2}\right).$$

ou, en substituant à z sa valeur,

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a\sqrt[3]{2}\left(m \pm \sqrt{2n - m^2}\right)}{2\sqrt[3]{3mn - m^3 + 2}}.$$

Pour que les valeurs de x et y ne soient pas imaginaires, il faut que l'on ait : $m^2 \leqslant 2n$.

Trouver entre quelles limites doit être compris x *pour que l'expression* $\frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)}$ *soit positive.*

Pour que la fraction proposée soit positive, il faut et il suffit qu'elle ait ses deux termes du même signe.

En mettant chaque trinôme sous la forme d'un produit de deux facteurs, l'expression devient :

$$\frac{(x^2 - 5)(x^2 - 12)}{x(x - 4 + \sqrt{11})(x - 4 - \sqrt{11})}.$$

et revient à :

$$\frac{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12})}{x(x - 4 + \sqrt{11})(x - 4 - \sqrt{11})}.$$

Supposons d'abord x positif. Le numérateur de l'expression aura alors le signe du produit $(x - \sqrt{5})(x - \sqrt{12})$,

c'est-à-dire qu'il sera : positif pour $x < \sqrt{5}$ ou $> \sqrt{12}$,

négatif pour $\sqrt{5} < x < \sqrt{12}$.

Le dénominateur sera :

positif pour $x < 4 - \sqrt{11}$ ou $> 4 + \sqrt{11}$,

négatif pour $4 - \sqrt{11} < x < 4 + \sqrt{11}$.

Il est aisé de voir que l'ordre de grandeur croissante des quantités ci-dessus est $4 - \sqrt{11}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$, $4 + \sqrt{11}$; par conséquent, les valeurs posi-

tives de x qui rendent l'expression positive sont comprises entre les limites suivantes :

$$0 < x < 4 - \sqrt{11}, \quad \sqrt{5} < x < \sqrt{12}, \quad 4 + \sqrt{11} < x < +\infty.$$

Lorsque x est négatif, le numérateur de la fraction a le signe du produit

$$(x + \sqrt{5})(x + \sqrt{12});$$

il est par suite :

positif pour $x < -12$ ou $> -\sqrt{5}$, négatif pour $-\sqrt{12} < x < -\sqrt{5}$.

Le dénominateur, ayant ses trois facteurs négatifs, est toujours négatif. Donc, dans le cas où x est négatif, l'expression donnée est positive lorsque

$$-\sqrt{12} < x < -\sqrt{5}.$$

Partager un angle donné a, *inférieur à* 90°, *en deux parties telles que la somme de leurs tangentes soit minimum.*

Soit x une des parties cherchées. La quantité à rendre minima est :

$$y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(a - x).$$

Elle peut s'écrire successivement :

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin(a - x)}{\cos(a - x)} = \frac{\sin x \cos(a - x) + \cos x \sin(a - x)}{\cos x \cos(a - x)}$$

$$= \frac{\sin a}{\cos x \cos(a - x)} = \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos(a - 2x)}.$$

Sin a étant constant, le minimum de y correspond au maximum de

$$\cos a + \cos(a - 2x),$$

ou simplement de

$$\cos(a - 2x).$$

Comme le maximum d'un cosinus est 1, on a :

$$\cos(a - 2x) = 1, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a}{2}.$$

La valeur du minimum est : $y = 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

Résoudre les équations :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.$$

Le premier membre de la première équation peut s'écrire successivement

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y}$$

$$= \frac{2 \sin(x + y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}.$$

Cette première équation revient donc à :

$$\frac{2 \sin b}{\cos b + \cos(x - y)} = a, \quad \text{d'où} \quad \cos(x - y) = \frac{2 \sin b}{a} - \cos b.$$

Si α désigne le plus petit arc correspondant à ce cosinus, on aura l'équation : $x - y = 2K\pi \pm \alpha,$

qui, combinée avec :

$$x + y = b,$$

donnera les valeurs suivantes pour x et y :

$$x = \frac{b}{2} + K\pi \pm \frac{\alpha}{2}, \quad y = \frac{b}{2} - K\pi \pm \frac{\alpha}{2}.$$

Pour rendre $\cos(x - y)$ calculable par logarithmes, on peut poser $\frac{a}{2} = \operatorname{cotg} \varphi$. Il vient ainsi :

$$\cos(x - y) = \frac{\sin b \cos \varphi - \cos b \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin(b - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Le système proposé n'est possible que si la valeur obtenue par $\cos(x - y)$ est comprise entre -1 et $+1$, ce qui exige que l'on ait :

$$1 \geqslant \frac{2 \sin b}{a} - \cos b \geqslant -1.$$

La première inégalité peut s'écrire :

$$1 + \cos b \geqslant \frac{2}{a} \sin b, \quad \text{ou} \quad 2\cos^2 \frac{b}{2} \geqslant \frac{4}{a} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2},$$

ou enfin

$$\operatorname{cotg} \frac{b}{2} \geqslant \frac{2}{a}.$$

On verra, de même, que la seconde inégalité revient à :

$$-\operatorname{tg} \frac{b}{2} \leqslant \frac{2}{a}.$$

Étant donnée une ellipse dont on connait le grand axe et la distance focale, on décrit avec le rayon r *une circonférence qui lui est concentrique. Si* M *est l'un des points d'intersection des deux courbes, on demande de calculer les rayons vecteurs* MF *et* MF' *de ce point. Conditions de possibilité déduites des formules.*

Soient $2a$ le grand axe et $2c$ la distance focale.

On a :

$$MF + MF' = 2a,$$

ou, en élevant au carré,

(1) $$\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2.$$

Dans le triangle MFF', MO est une médiane; donc :

(2) $$\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 = 2c^2 + 2r^2.$$

Retranchant (2) de (1), il vient :

$$2MF.MF' = 4a^2 - 2c^2 - 2r^2.$$

Les rayons vecteurs MF et MF', dont on connait ainsi la somme et le produit, sont racines de l'équation :

$$X^2 - aX + 2a^2 - c^2 - r^2 = 0.$$

Discussion. — Pour être acceptables, les racines de cette équation doivent être réelles et comprises entre $a - c$ et $a + c$.

La condition de réalité est :

$$c^2 + r^2 - a^2 \geqslant 0, \quad \text{ou} \quad r^2 \geqslant a^2 - c^2.$$

En substituant $a + c$ et $a - c$ à x dans l'équation, on obtient :

$$(a \pm c)^2 - 2a(a \pm c) + 2a^2 - c^2 - r^2,$$

ou

$$(a \pm c - a)^2 + a^2 - c^2 - r^2,$$

ou simplement

$$a^2 - r^2.$$

Ce résultat doit être positif pour que $a - c$ et $a + c$ soient extérieurs aux racines. Il faut donc que l'on ait :

$$r^2 < a^2.$$

D'ailleurs, la demi-somme des racines étant a, $a - c$ est inférieur à la plus petite et $a + c$ est supérieur à la plus grande.

La résolution de l'équation donne :

$$X = a \pm \sqrt{c^2 + r^2 - a^2},$$

valeurs qu'on peut prendre indifféremment pour MF et MF'.

---

x et y étant deux nombres à volonté, on calcule deux autres nombres x' et y' par les formules :

$$x' = ax + by + c, \quad y' = a'x + b'y + c'.$$

On emploie ces deux derniers pour en former deux nouveaux x'', y'' à l'aide des mêmes formules, et l'on demande de déterminer a', b', c', de manière que, quels que soient les nombres primitifs x, y, le résultat de l'opération soit de les reproduire, ou, qu'en d'autres termes, on ait toujours x'' = x, y'' = y.

On vérifiera les valeurs obtenues.

On a, par définition :

$$x'' = ax' + by' + c, \quad y'' = a'x' + b'y' + c'.$$

En remplaçant dans ces égalités x', y', x'' et y'' par leurs valeurs en fonction de x et y, il vient :

$$x = a(ax + by + c) + b(a'x + b'y + c') + c,$$
$$y = a'(ax + by + c) + b'(a'x + b'y + c') + c',$$

ou, après réductions,

$$(a^2 + ba' - 1)x + b(a + b')y + ac + bc' + c = 0,$$
$$a'(a + b')x + (b'^2 + a'b - 1)y + a'c + bc' + c' = 0.$$

Pour que ces deux équations soient satisfaites quelles que soient les valeurs de x et de y, il faut que les coefficients de x et y, ainsi que les termes indépendants, soient nuls. En égalant à zéro les trois termes de la première équation, on obtient :

$$a' = -\frac{a^2 - 1}{b}, \quad b' = -a, \quad c' = -\frac{c(a + 1)}{b}.$$

Ces valeurs vérifient d'ailleurs identiquement la seconde équation.

Connaissant le volume $\frac{1}{3}\pi a^3$ *et la surface totale* πb^2 *d'un cône droit* SAB, *déterminer le rayon de base* R *et la hauteur* h. *Conditions de possibilité du problème. Quelle relation faut-il supposer entre les données* a *et* b *pour que le triangle* SAB, *obtenu en coupant le cône par un plan passant par l'axe soit équilatéral.*

Le volume du cône étant représenté par $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ et sa surface totale par $\pi R\sqrt{R^2+h^2}+R^2$, les équations du problème sont :

(1) $$R^2 h = a^3,$$

(2) $$R\sqrt{R^2+h^2}+R^2 = b^2.$$

L'équation (2) peut s'écrire :

(3) $$R\sqrt{R^2+h^2} = b^2 - R^2,$$

ou, en élevant au carré et simplifiant,

$$R^2h^2 = b^4 - 2b^2R^2.$$

Remplaçant h par sa valeur tirée de (1), il vient :

$$\frac{a^6}{R^2} = b^4 - 2b^2R^2,$$

ou

(4) $$2b^2R^4 - b^4R^2 + a^6 = 0.$$

Discussion. — Les valeurs de R^2, tirées de cette équation, sont positives, car leur somme $\frac{b^2}{2}$ est positive, ainsi que leur produit $\frac{a^6}{2b^2}$.

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut que l'on ait :

$$b^8 - 8b^2a^6 \geqslant 0, \quad \text{ou} \quad b^6 \geqslant 8a^6, \quad \text{ou enfin} \quad b^2 \geqslant 2a^2.$$

De plus, le premier membre de (3) étant positif, il faut que R^2 soit plus petit que b^2. En substituant $b^2a^2R^2$ dans l'équation (4), on obtient :

$$2b^6 - b^6 + a^6, \quad \text{ou} \quad b^6 + a^6.$$

Ce résultat positif indique que b^2 est en dehors des racines.

Comme b^2 est supérieur à la demi-somme $\frac{b^2}{4}$ des racines, ces racines sont inférieures à b^2. La seule condition de possibilité est donc $b^2 \geqslant 2a^2$.

Les expressions de R et de h sont :

$$R = \sqrt{\frac{b^2 \pm \sqrt{b^6 - 8a^6}}{4b}}, \quad h = \frac{a^3}{R^2} = \frac{b(b^3 \pm \sqrt{b^6 - 8a^6})}{2a^3}.$$

La condition énoncée s'exprime par :

$$h = R\sqrt{3}, \quad \text{ou} \quad a^3 = R^3\sqrt{3};$$

on déduit de là :

$$R = \frac{a}{\sqrt[6]{3}}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (4), on a la relation cherchée :

$$\frac{2b^2a^4}{\sqrt[3]{9}} - \frac{b^4a^2}{\sqrt[3]{3}} + a^6 = 0,$$

ou mieux

$$2a^2b^2 - b^4\sqrt[3]{3} + a^4\sqrt[3]{9} = 0.$$

Couper une sphère de rayon R *par deux plans parallèles, de façon que l'aire de la zone correspondante ait une valeur donnée (que l'on représentera par* $2\pi Rb$*), et que le volume du segment sphérique compris entre ces deux plans parallèles soit maximum.*

Désignons par x et y les distances des deux plans parallèles au centre de la sphère.

On a l'équation :

$$2\pi R(x+y = 2\pi Rb, \quad \text{ou} \quad x+y=b.$$

Le volume du segment sphérique a pour expression :

$$V = \frac{1}{2}\pi b\left[(R^2-x^2)+(R^2-y^2)\right]+\frac{1}{6}\pi b^3,$$

ou

$$V = \frac{1}{2}\pi b(2R^2-x^2-y^2)+\frac{1}{6}\pi b^3.$$

Ce volume devient maximum en même temps que la quantité

$$2R^2-x^2-y^2,$$

qui peut s'écrire :

$$2R^2-(x+y)^2+2xy, \quad \text{ou} \quad 2R^2-b^2+2xy.$$

Cette dernière expression est maxima en même temps que xy. Or, la somme $x+y$ est constamment égale à b. Donc le maximum a lieu lorsque l'on a :

$$x = y\,\frac{b}{2},$$

$\frac{b}{2}$ doit être plus petit que R. Autrement dit, l'aire donnée $2\pi Rb$ doit être plus petite que $4\pi R^2$, aire de la sphère.

Résoudre l'équation :

(1) $$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=m.$$

On trouve que l'inconnue x *est donnée par une équation du premier degré. La racine de cette équation satisfait-elle toujours à l'équation* (1) ?

L'équation peut s'écrire :

(2) $$\sqrt{a+x}=m-\sqrt{b+x},$$

ou, en élevant au carré,

$$a+x=m^2-2m\sqrt{b+x}+b+x,$$

ou

$$\sqrt{b+x}=\frac{m^2+b-a}{2m}.$$

Élevant de nouveau au carré, il vient :

$$b+x+\frac{(m^2+b-a)^2}{4m^2}; \quad \text{d'où} \quad x=\frac{(m^2+b-a)^2-4bm^2}{4m^2}.$$

Pour que cette valeur de x satisfasse à l'équation (1), il faut que les équations (2) et (3), qui ont été élevées au carré, aient leurs seconds membres positifs. On doit ainsi avoir, pour l'équation (2) :

$$m>\sqrt{b+x}, \quad \text{ou} \quad m>\frac{m^2+b-a}{2m}.$$

ou (m^2 étant positif),

$$2m^2 > m^2 + b - a,$$

ou enfin

$$m^2 > b - a.$$

De même, le second membre de (3) sera positif, si l'on a :

$$m^2 > a - b.$$

La racine trouvée ne satisfait donc à l'équation (1) qu'autant que l'on a :

$$m \geqslant \sqrt{\pm (a - b)}.$$

Sur les côtés d'un angle droit xOy *on mène deux droites antiparallèles de longueurs données* : AB = a, A'B' = a'. *On forme ainsi un quadrilatère inscriptible* ABB'A. 1° *Démontrer la relation* : $4R^2 = a^2 + a'^2$, R *étant le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère*; 2° *Déterminer la position du quadrilatère, connaissant de plus la distance* OC = b *du point* O *au centre du cercle.*

Soit le premier triangle rectangle Oyx, et si nous menons une antiparallèle à la base, nous obtenons un second triangle rectangle $Oy'x'$; abaissons du point O une perpendiculaire à la base a, OD, et traçons Om la médiane. Dans un triangle rectangle la hauteur abaissée du sommet O, sur l'hypoténuse est une symédiane, et la symédiane divise toutes les lignes antiparallèles à la base en deux parties égales, donc, si nous désignons par m' l'intersection de la symédiane avec la ligne antiparallèle à la base, Om' sera médiane du triangle rectangle $Oy'x'$, et la médiane du triangle Oyx, Om, sera la hauteur du triangle $y'x'O$. Déterminons le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère $y'yxx'$, pour cela menons des perpendiculaires au milieu des bases m et m', et leur intersection déterminera le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $y'yxx'$. Soit C ce point; la ligne mC sera parallèle à la ligne Om', puisque Om' est perpendiculaire à la ligne xy et Cm est aussi perpendiculaire à la même ligne. La ligne $m'C$ sera parallèle à la ligne Om, comme perpendiculaires à la même ligne $x'y'$. La figure $Om'Cm$ sera un parallélogramme, donc $Om' = Cm$, et $mO = Cm'$. Mais Om est la médiane du triangle $Ox'y'$, et est égale à la moitié de sa base. $Cm = Om' = \frac{a'}{2}$ et Om est la médiane du triangle rectangle Oyx et égale la moitié de sa base. $Cm' = Om = \frac{a}{2}$. Du triangle rectangle xmC, le rayon $R^2 = \frac{a^2}{4} + mC^2$, mais $mC^2 = \frac{a'^2}{4}$, ou $R^2 = \frac{a^2 + a'^2}{4}$.

En chassant le dénominateur, nous avons la formule annoncée :

$$4R^2 = a^2 + a'^2.$$

Connaissant $Oc = b$, nous pouvons calculer mm'. La médiane

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{a}{4} + \frac{a'^2}{4}\right) - mm'^2},$$

ou, en élevant cette équation au carré, nous avons

$$mm'^2 = \frac{a^2 + a'^2 - 2b^2}{2}, \quad \text{ou} \quad mm' = \sqrt{\frac{a^2 + a'^2 - 2b^2}{2}}.$$

L'angle

$$mOm' = 90 - 2y \quad \text{et} \quad mm'^2 = \frac{a'^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{aa'}{4}\cos mOm$$

d'où, en remplaçant mm' par sa valeur, nous avons

$$\frac{a^2 + a'^2 - 2a^2 - 2a'^2 + 4b^2}{4} = \frac{2aa'}{4}\cos mOm',$$

d'où

$$\cos mOm' = \frac{4b^2 - (a^2 + a'^2)}{2aa'} = \sin 2y; \quad 2\sin y \,.\, \cos y = \frac{4b^2 - (a^2 + a'^2)}{2aa'}$$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$; en ajoutant et retranchant, nous avons

$$\cos y + \sin y = \sqrt{\frac{4b^2 - (a - a')^2}{2aa'}}; \quad \cos y - \sin y = \sqrt{\frac{(a + a')^2 - 4b^2}{2aa'}}.$$

d'où $$\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a + a')^2 - 4b^2}{2aa'}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^2 - (a - a')^2}{2aa'}}$$

et $$\sin y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a + a')^2 - 4b^2}{2aa'}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^2 - (a - a')^2}{2aa'}}$$

connaissant $\cos y$ et $\sin y$, nous pouvons calculer les côtés Oy et Ox, de même nous pouvons calculer les côtés Oy' et Ox'. En retranchant de $Ox - Ox'$, nous avons le côté du quadrilatère xx', et en retranchant de $Oy - Oy'$, nous avons le côté yy'. **N. Plakhowo.**

TROISIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Géométrie cotée, par Lucien Ibach, directeur de l'Ecole Malesherbes et G. Mariaud, professeur à Sainte-Barbe.

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge du livre de *Géométrie cotée* de MM. Ibach et Mariaud. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que toutes les questions y sont traitées de la façon la plus complète. Pour chaque question, les auteurs ne se contentent pas d'une solution : presque toutes comportent plusieurs solutions, qui y sont exposées et développées. Dans chaque cas particulier, l'élève pourra choisir la plus rapide et la plus élégante et s'habituer à faire ainsi sans difficulté et dans le temps voulu les épures comprises dans les programmes des Ecoles.

Le traité est divisé en deux parties : le *texte* et les *planches*. Cette dernière partie comprend 235 planches admirablement gravées et qui ne peuvent que faciliter le travail du candidat. Rien n'a été négligé dans ce but.

Comme le dit dans sa préface M. Klein, directeur de l'Institut commercial, qui a bien voulu présenter ce livre aux lecteurs : « Ce traité, bien « étudié, bien conçu dans l'esprit des programmes, contient tout ce qu'un « candidat sérieux doit posséder ; il rendra des services signalés aux jeunes « gens... et il se distingue très nettement et très avantageusement de tous « ceux qui ont été écrits avant lui. »

Opinions et Curiosités touchant la Mathématique, d'après les ouvrages français des XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, par Georges MAUPIN, licencié ès sciences mathématiques et physiques. 1 vol. in-8° carré de 200 pages, avec figures, cartonné à l'anglaise. Prix : 5 francs (Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine, Paris).

Quelles opinions avaient de l'utilité des mathématiques dans les siècles précédents non seulement les savants, mais surtout les faiseurs de livres et même les ignorants ? Quels avantages pensait-on en retirer pour l'éducation ; quelle liaison singulière voulait-on établir entre la doctrine mathématique et la religion ? Voilà ce qui est traité dans ce volume. En donnant des extraits curieux et piquants des auteurs qu'il cite, M. Maupin ne s'est permis d'y ajouter que de brefs commentaires et de courtes notes biographiques, ne voulant rien ôter de leur caractère aux textes mentionnés. Ajoutons que ce n'est pas là un ouvrage savant et que, dans ses parties les plus saillantes, on s'est efforcé de le rendre intelligible à tous ceux qui ont en mathématiques des connaissances moyennes. Ce livre a, par ailleurs, un côté documentaire qui séduira les personnes qu'intéresse l'évolution de l'esprit mathématique à travers les graves querelles d'écoles et les discussions brûlantes des dogmatistes. — Les mathématiciens trouveront un vif intérêt à cette excursion rétrospective dans le domaine de la géométrie, et les curieux, que n'effrayent pas les soutenances imprévues, prendront plaisir à l'intervention des mathématiques dans le dogme de la Présence réelle. — D'autre part, le volume de M. Maupin, en tout décidément instructif, nous donne, en manière d'actualité, des aperçus originaux sur ce que pensaient de l'utilité du latin dans l'enseignement les maîtres d'autrefois. — Rien des idées que nous émettons aujourd'hui sur ce sujet sont, à la vérité, celles d'hier et nous devons au livre de M. Maupin la satisfaction de l'apprendre.

L'Enseignement Mathématique, revue internationale paraissant tous les deux mois. *Directeurs* : C. A. Laisant, docteur ès sciences, répétiteur à l'Ecole Polytechnique et H. Fehr, Privat-docent à l'Université de Genève, professeur au Collège et à l'Ecole professionnelle. — Editeurs : Carré et Naud, 3, rue Racine.

Cette nouvelle revue se présente sous les auspices de deux hommes qui occupent une haute situation dans le monde scientifique : M. Laisant, dont on connait les remarquables travaux scientifiques et M. Fehr, qui est un des savants les plus distingués de la Suisse.

C'est assez dire que cette revue offrira le plus grand intérêt à tous ceux qui suivent le mouvement scientifique.

Cette publication a un caractère franchement et hautement international et le comité se compose des plus éminents mathématiciens de toutes les nations. Chaque numéro contiendra, en principe : 1° des articles généraux ; 2° des études pédagogiques ; 3° une chronique et des correspondances ; 4° une partie bibliographique. La philosophie scientifique y tiendra sa place et les articles qu'elle inspirera ne manqueront pas d'offrir au lecteur un attrait tout particulier.

On ne peut qu'applaudir à la fondation de cette œuvre nouvelle, au commencement de ce xxe siècle, puisque ce siècle, comme le disent les directeurs de la revue dans leur premier article : « Soit au point de vue « de la science pure, soit à celui des applications manifestera des exigences « auxquelles personne ne doit ni ne peut se dérober ».

La technique des rayons X, manuel opératoire de la radiographie et de la fluoroscopie à l'usage des médecins, chirurgiens et amateurs de photographie, par Alexandre Hébert, préparateur à la faculté de médecine (Carré et Naud, 3, rue Racine).

Cet ouvrage correspond à une actualité qui intéresse tout le monde. Tous les journaux scientifiques ont consacré de nombreux articles à cette magnifique découverte du Dr Rœntgen, et la presse quotidienne s'en est emparée au point de vue des faits et des applications pratiques.

M. Hébert a su donner de la technique et de l'emploi des rayons X une idée assez précise, pour permettre au lecteur non encore initié au mode opératoire, de produire chez lui ces rayons et de les appliquer sans difficulté à l'inspection des parties profondes du corps humain.

Il indique au lecteur la façon d'acheter le matériel nécessaire, de l'entretenir en bon état et de s'en servir. S'il veut bien suivre le manuel opératoire, d'ailleurs très simple, que décrit ce petit livre, il aura la surprise d'obtenir, du premier coup et sans effort, des images d'un genre nouveau, dont la beauté ne le cédera en rien à celle des radiographies qui ont été publiées un peu partout.

Le Directeur-gérant,
Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTERAIRE BUSSIÈRE FRERES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE ST-CYR

406. Mathématiques. — Partager un triangle équilatéral ABC en deux parties de surfaces équivalentes par une sécante DF faisant avec la base BC un angle α. Chercher la condition que doit remplir l'angle α pour que les points D et F soient d'un même côté de la base BC. Vérifier les formules dans le cas où $\alpha = 30°$.

407. Epure. — Un tétraèdre SABC repose par sa base sur le plan de côte O. L'angle trièdre S est trirectangle, les côtés de la base sont AB = 210 millimètres, BC = 192 millimètres et AC = 150 millimètres. AB est parallèle aux petits côtés de la feuille.

Construire l'intersection de ce tétraèdre et de la sphère qui passe par le point S et par les milieux des côtés du triangle ABC.

408. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant :

$$b = 6\,942, \quad c = 8\,249 \quad \text{et} \quad A = 31°28'24''.$$

409. Questions posées à l'oral. — Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône dont on donne la hauteur h, sachant que la surface latérale est égale à la somme des surfaces des bases, et que le volume est six fois le volume de la sphère qui aurait pour diamètre la hauteur h du tronc de cône.

— On considère un point D variable sur une tangente fixe d'un cercle; du point D on mène la seconde tangente DC au cercle; on joint OC, qui rencontre la parallèle OB menée par D en un point M. Lieu de M quand D parcourt la tangente.

— Etant donnée l'équation : $x^2 + px + q = 0$, déterminer p et q par la condition qu'entre les racines x' et x'', on ait la relation :

$$x' = \frac{1}{x''} + x''.$$

— Etant donné $\cos a$, trouver $\cos \frac{a}{4}$. Résoudre le problème inverse.

— Résoudre l'équation : $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = b$.

— On considère un rectangle ABCD de côté a et b. On mène la diagonale AC, on abaisse de D la perpendiculaire DM sur la diagonale; par le point M on mène des parallèles MP et MQ aux côtés du rectangle. Démontrer que $\frac{MQ}{MP} = \frac{a^3}{b^3}$.

— Etant donné l'équation $x^2 + px + q = 0$, déterminer q de façon qu'une des racines soit le cube de l'autre.

Suivre les variations de la fonction $y = \frac{4(2x - 4)}{x^2 - 4}$. Construire la courbe.

— Transformer en une somme de radicaux simples l'expression :

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}.$$

— Démontrer que l'expression :

$$\cos^2 x + \cos^2(120^\circ + x) + \cos^2(120^\circ - x)$$

est constante, quelle que soit la valeur donnée à x.

— Démontrer que, dans un triangle rectangle, on a :

$$\cos(B - C) = \frac{2bc}{a^2} \quad \text{et} \quad \cos(B - C) = 2 \sin B \sin C.$$

— Soient une ellipse et un point P d'où l'on mène les tangentes PM, PM'. Démontrer que la droite qui joint P au foyer F est bissectrice de l'angle M'FM.

— On donne deux circonférences concentriques, un point A sur la circonférence intérieure et le diamètre AB. On mène une corde AM et la perpendiculaire CAD à cette courbe. Déterminer l'angle $\widehat{MAB} = x$, de manière que le triangle MCD ait une surface donnée.

— On donne deux cercles égaux tangents extérieurement. Soient OB et OB' deux rayons également inclinés sur OO', tels que BOO' = OO'B. Etudier les variations de la surface du trapèze OO'B'B, quand on fait varier l'angle BOB'. Entre quelles limites doit varier cet angle ?

— On a entre les angles d'un triangle la relation :

$$\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C.$$

Montrer que ce triangle est isocèle.

— On donne un triangle ABC. Trouver le lieu des points M tels que l'on ait : $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$.

— Si on a la relation $\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2}$ entre les angles d'un triangle, démontrer que ce triangle est isocèle.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

110. Mathématiques. — Une société de secours mutuels comprend 450 membres : 1° des membres participants (hommes, femmes et enfants); 2° des membres honoraires. Les uns et les autres versent une cotisation fixe. La cotisation des hommes égale à celle des femmes est le double de celle des enfants et les $\frac{4}{5}$ de celle des membres honoraires. D'autre part, le nombre de ces derniers est les $\frac{2}{7}$ de celui des membres participants, et le nombre des enfants $\frac{1}{4}$ de celui des hommes et des femmes réunis. Enfin la cotisation d'un membre honoraire est de 15 francs. Quel est le montant des recettes annuelles de la société?

111. Physique. — Un tube de verre très résistant est effilé à l'une de ses extrémités. On y introduit de l'éther que l'on fait bouillir de manière à chasser l'air complètement; puis on ferme le tube à la lampe. Le poids d'éther contenu à ce moment dans le tube est de 10 grammes. On porte l'appareil à la température de 300°. On demande quelle sera en atmosphères la pression développée à l'intérieur du tube.

On sait que la capacité du tube à 300° est exactement de 100 centimètres cubes, que la densité de la vapeur d'éther est 2,586; enfin que l'éther est entièrement volatilisé dans le tube à la température de 300°.

412. Calcul logarithmique. — Calculer à 0,0001 près l'expression :

$$x = \frac{\sqrt{2 \times \frac{1}{\sqrt{\pi}}}}{2\sqrt[7]{\pi^2}}.$$

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

413. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Peut-on déterminer a de façon que la fonction $\frac{x^2 + ax + 1}{x + a}$ ait pour maximum ou pour minimum la valeur a.

Au choix). — *a*) Exposer la méthode des isopérimètres pour le calcul du nombre π.

b) Volume du segment sphérique. Démonstration.

c) Volume d'un triangle tournant.

414. Physique. (*Obligatoire*). — Un vase en laiton, pesant 375 grammes, contient 900 grammes de neige à — 18°. On y fait arriver un jet de vapeur d'eau bouillante à 100° jusqu'à ce que toute la neige se soit transformée en eau à 0°. Quel est le poids de la vapeur d'eau qu'il faut employer pour cela? Quel volume occuperait cette vapeur sous la pression de 800 millimètres?

(*Au choix*). — *a*) Lunette de Galilée.

b) Enoncer les lois relatives à l'action des contacts sur les courants.

c) Décrire la pile de Volta et les principaux types des piles à un et à deux liquides.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

415. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Résoudre le système d'équations

$$xy = a(x + y) \qquad x^2 + y^2 = b^2$$

où a et b sont des quantités données toutes deux différentes de O.

A quelles conditions doivent satisfaire a et b pour que toutes les solutions soient réelles?

(*Au choix*). — *a*) Sections planes du cône.

b) Volume de la sphère.

c) Cas de similitude des triangles.

416. Physique. (*Obligatoire*). — On a disposé deux lentilles à 30 centimètres l'une de l'autre, de manière que leurs axes coïncident. La première est convergente et a une distance focale de 30 centimètres; la deuxième est divergente et sa distance focale est de 15 centimètres.

Un disque circulaire lumineux est placé perpendiculairement à l'axe, à 60 centimètres de la lentille convergente. Décrire la marche des rayons lumineux; calculer le rapport des grandeurs de l'image et de l'objet.

Au choix). — *a*) Théorie du siphon.

b) De l'influence électrique.

c) Détermination de la chaleur spécifique des corps.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

417. Arithmétique. — Un marchand a acheté une certaine quantité de froment. Il en a vendu $\frac{1}{5}$ à 10 % de bénéfice; $\frac{1}{5}$ à 20 % de bénéfice; $\frac{3}{5}$ à 15 % de perte. Il perd en tout 300 fr. Quel était le prix d'achat?

418. Géométrie. — Un quadrilatère circonscrit à une circonférence de rayon donnée, a deux angles opposés droits. On connaît sa surface, et on demande les longueurs de ses côtés et ses angles. Discuter le problème.

419. Calcul logarithmique. — Calculer :

$$x = \sqrt[3]{7 \times \sqrt[4]{\pi} \times \frac{1}{\pi^2} \times \sqrt[5]{\frac{\pi}{1,6248}}}.$$

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

420. Arithmétique. — Un confiseur achète 150 kilogrammes de fruits qu'il paie $0^{fr},34$ le kilogramme. Le déchet est de 12 %. Avant la cuisson, il ajoute à la partie restante la moitié de son poids de sucre. L'évaporation réduit le mélange de deux tiers. Le sucre ayant coûté $108^{fr},50$ le quintal, on demande à combien revient le kilogramme de marchandise.

421. Géométrie. — Etant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D, on mène par un point P quelconque du plan les circonférences PAB et PCD qui se coupent en général en un point P′. Démontrer que la droite PP′ passe par un point fixe, quel que soit le point P choisi.

422. Algèbre. — Sachant que l'on a :

$$x + y + z = a \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \qquad x^3 + y^3 + z^3 = c^3,$$

on demande de calculer le produit xyz.

423. Calcul logarithmique. — Calculer :

$$x = \sqrt[7]{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \times \frac{2,3267}{\sqrt[5]{(2,4827)^3 \times \frac{1}{3,7289}}}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

I. Solution aux questions proposées

On plonge dans un vase, qui contient 10 litres d'eau à 100°, un bloc de glace du poids de 3 kilog. Après avoir attendu que la température soit devenue stationnaire, on plonge de nouveau dans le vase un bloc de glace qui provoque un nouvel abaissement de température de 10°. On demande quel était le poids de ce dernier bloc de glace. On ne tient compte ni de la chaleur absorbée par le vase, ni de celle qui a pu être perdue.

La densité de l'eau à 100° était 0,9586, le poids de 10 litres d'eau à cette température sera de $9^k,586$, ou de 9 586 grammes.

Soit θ la température de l'eau lorsque le premier bloc de glace est fondu. L'eau aura perdu une quantité de chaleur égale à :

$$9\,586\,(100 - \theta) \text{ calories.}$$

De leur côté, les 3 kilog. de glace ont absorbé pour fondre $3\,000 \times 80$ calories. D'autre part, les 3000 grammes d'eau provenant de la fusion ont absorbé ensuite, pour s'élever de $0°$ à $\theta°$, une quantité de chaleur égale à $3\,000 \times \theta$ calories.

Egalant la chaleur perdue à la somme des chaleurs absorbées, nous avons :

$$9\,586\,(100 - \theta) = 3\,000 \times 80 + 3\,000 \times \theta$$

d'où

$$\theta = \frac{958\,600 - 240\,000}{9\,586 + 3\,000} = \frac{718\,600}{12\,586} = 57°.$$

Le vase contient alors $12^k,586$ d'eau à $57°$.

Si, en introduisant un bloc de glace dans le récipient, on détermine un abaissement de température de $10°$, la quantité de chaleur perdue par les $12^k,586$ d'eau sera égale à 125 860 calories.

Le bloc de glace a, d'autre part, absorbé, pour fondre et pour s'élever ensuite à la température de $47°$, une quantité de chaleur égale à :

$$P \times 80 + P \times 47 \text{ calories.}$$

En égalant la quantité de chaleur perdue aux quantités de chaleur absorbées, il vient :

$$125\,860 = P \times (80 + 47) = P \times 127,$$

d'où

$$P = \frac{125\,860}{127} = 991 \text{ grammes.}$$

Le poids du dernier bloc de glace était donc de $0^k,991$.

René Armand
de Chateaubourg (Ille-et-Vilaine).

II. Questions diverses avec solutions

On considère le trinôme $x^2 - (8\alpha - 2)x + 15\alpha^2 - 2\alpha - 7$.

On demande :

1° *D'indiquer comment il faut choisir* α *pour que le trinôme soit positif pour toutes les valeurs de* x ;

2° *De choisir* α *de telle sorte que, dans l'équation obtenue en égalant le trinôme à zéro, la somme des carrés des racines soit égale à 24.*

Pour que le trinôme soit positif pour toutes les valeurs de x, il faut qu'il puisse se décomposer en une somme de deux carrés, ou encore qu'il soit un carré parfait. Pour cela, il faut que la quantité placée sous le radical soit négative ou nulle.

On aura

$$(4\alpha - 1)^2 - 15\alpha^2 + 2\alpha + 7 \leq 0,$$

ce qui donne :

$$\alpha^2 - 6\alpha + 8 \leq 0 \quad \text{ou} \quad (\alpha - 2)(\alpha - 4) \leq 0.$$

Tant que α sera compris entre $-\infty$ et 2, ou entre 4 et $+\infty$, le trinôme donné sera positif, quel que soit x.

Si la somme des carrés des racines est égale à 24, on a : $x'^2 + x''^2 = 24$ ou

$$(x' + x'')^2 - 2x'x'' = 24;$$

mais

$$x'x'' = 8\alpha - 2 \quad x'x'' = 15\alpha^2 - 2\alpha - 7.$$

Donc :

$$(8\alpha - 2)^2 - 30\alpha^2 + 4\alpha + 14 = 24 \quad \text{ou} \quad 17\alpha^2 - 14\alpha - 3 = 0.$$

Les racines de cette équation étant 1 et $-\frac{3}{17}$, ces deux nombres satisfont à la condition exigée.

Résoudre un triangle, connaissant un côté a, *l'angle opposé* A *et la longueur de la bissectrice, issue du sommet de l'angle* A *menée à l'intérieur du triangle et terminée au côté* a.

Soit l la bissectrice AI donnée et b et c les côtés AC et AB qu'il faut trouver.

Dans le triangle ABI, on a :

$$\sin B = \frac{l \sin \frac{A}{2}}{BI}, \text{ et, dans ABC,} \quad \sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

D'où $\frac{l \sin \frac{A}{2}}{BI} = \frac{b \sin A}{a}$; et, comme $\sin A = 2 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}$ et $BI = \frac{ac}{b+c}$, il vient :

(1) $$l(b + c) = 2bc \cos \frac{A}{2}.$$

Dans le triangle ABC, on a encore : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ou

(2) $$(b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2} = a^2.$$

Pour résoudre ces deux équations, je pose :

$$b + c = x \quad \text{et} \quad bc = y.$$

Il vient :

(3) $$lx = 2y \cos \frac{A}{2},$$

(4) $$x^2 - 4y \cos^2 \frac{A}{2} = a^2.$$

De (3), je tire $y = \frac{lx}{2 \cos \frac{A}{2}}$ que je porte dans (4), ce qui donne :

$$x^2 - \frac{4lx \cos^2 \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{A}{2}} = a^2$$

ou

(5) $$x^2 - 2lx \cos \frac{A}{2} - a^2 = 0.$$

Cette équation a ses deux racines réelles et de signes contraires. Rejetant la racine négative, je trouve :

$$(6) \qquad x = l \cos\frac{A}{2} + \sqrt{l^2\cos^2\frac{A}{2} + a^2}.$$

et, pour y, la valeur $y = \dfrac{l^2\cos\frac{A}{2} + l\sqrt{l^2\cos^2\frac{A}{2} + a^2}}{2\cos\frac{A}{2}}$.

Les deux quantités b et c seront les racines de l'équation du second degré.

$$z^2 - xz + y = 0, \text{ qui donne } \left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4y}}{2},$$

substituant à la place de x et y leurs valeurs données plus haut, on trouve b et c et par suite l'angle B au moyen de la formule $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$.

Calculer l'angle A *d'un triangle connaissant les côtés* b *et* c *et sachant que la surface est égale à* m *fois celle du cercle décrit sur le troisième côté comme diamètre. Entre quelles limites peut varier le nombre positif* m ?

On a :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$S = \frac{m\pi a^2}{4} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

D'où
$$a^2 = \frac{4S}{\pi m} = 2bc\,\frac{\sin A}{\pi m}.$$

Par suite
$$\frac{2bc \sin A}{\pi m} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

ou
$$2bc \sin A = \pi m(b^2 + c^2) - 2bc.\pi m.\cos A,$$

ou, en exprimant les sinus et les cosinus en fonction de la tangente.

$$2bc \operatorname{tg} A = \pi m(b^2 + c^2)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A} - 2bc\pi m,$$

ou

$$2bc \operatorname{tg} A + 2\pi mbc = \pi m(b^2 + c^2)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}.$$

On élève les deux membres au carré, et on a :

$$4b^2c^2 \operatorname{tg}^2 A + 8b^2c^2\pi m \operatorname{tg} A + 4\pi^2m^2b^2c^2 = \pi^2m^2(b^2 + c^2)^2(1 + \operatorname{tg}^2 A)$$

ou

$$\left[4b^2c^2 - \pi^2m^2(b^2 + c^2)^2\right] \operatorname{tg}^2 A + 8b^2c^2\pi m \operatorname{tg} A - 4\pi^2m^2(b^2c^2)^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines est :

$$16b^4c^4\pi^2m^2 + \pi^2m^2(b^2 - c^2)^2\left[4b^2c^2 - \pi^2m^2(b^2 + c^2)^2\right] > 0,$$

ou

$$m^2 < \frac{4b^2c^2(b^2 + c^2)^2}{\pi^2(b^2 + c^2)^2(b^2 - c^2)^2},$$

ou enfin
$$m^2 < \frac{4b^2c^2}{\pi^2(b^2 - c^2)^2};$$

et
$$m < \frac{2bc}{\pi(b^2 - c^2)}.$$

Les côtés d'un triangle ont pour mesures respectives trois nombres entiers en progression arithmétique. Si l'on ajoute 50 à la mesure de chaque côté, le rayon du cercle inscrit augmente de 17, et, si l'on ajoute 60 à chaque côté, le même rayon augmente de 20. Calculer les côtés de ce triangle.

On a

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Soit m la raison et b le terme moyen.

On aura

$$a = b - m,$$
$$c = b + m.$$

$$p = \frac{3b}{2}, \quad p - a = \frac{b}{2} + m, \quad p - b = \frac{b}{2}, \quad p - c = \frac{b}{2} - m.$$

Par suite

(1) $$r = \sqrt{\frac{b^2 - 4m^2}{12}}.$$

Si b augmente de 50, m ne change pas et r augmente de 17.

D'où

(2) $$r + 17 = \sqrt{\frac{(b+50)^2 - 4m^2}{12}};$$

on a de même :

(3) $$r + 20 = \sqrt{\frac{(b+60)^2 - 4m^2}{12}}.$$

Élevant ces équations au carré, et les retranchant deux à deux, on trouve :

(4) $$34r + 289 = \frac{2\,500 + 100b}{12},$$

(5) $$40r + 400 = \frac{3\,600 + 120b}{12}.$$

ou encore :

(6) $$25b - 102r = 242,$$

(7) $$b - 4r = 10,$$

équations qui donnent $b = 26$, $r = 4$.

L'équation (1) donne $12r^2 = b^2 - 4m^2$

ou

$$m^2 = \frac{b^2 - 12r^2}{4}.$$

et

$$m = \frac{\sqrt{b^2 - 4r^2}}{12},$$

ou, après substitution, $m = 11$.

Les autres côtés sont :

$$a = b - m = 26 - 11 = 15,$$
$$c = b + m = 26 + 11 = 37.$$

Eliminer x, y, z, *entre les quatre équations* :

$$m \cos x + n \sin x = 1,$$
$$m \cos y + n \sin y = 1,$$
$$\frac{\cos x}{\cos z} + \frac{\sin x}{\sin z} = -1,$$
$$\frac{\cos y}{\cos z} + \frac{\sin y}{\sin z} = -1.$$

En ajoutant et en retranchant, membre à membre, les deux premières équations, on a :

$$\cos \frac{x-y}{2}\left(m \cos \frac{x+y}{2} + n \sin \frac{x+y}{2}\right) = 1,$$
$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{n}{m}.$$

De même en ajoutant et retranchant les deux dernières équations données, on obtient :

$$\cos \frac{x-y}{2}\left(\frac{\cos \frac{x+y}{2}}{\cos z} + \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\sin z}\right) = -1,$$
$$\operatorname{cotg} z = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{n}{m}.$$

Si maintenant on élimine $\cos \frac{x-y}{2}$ entre la première et la troisième des équations précédentes, il vient :

$$m = \frac{1}{\cos z} = -\left(\frac{1}{\sin z} + n\right) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = -\left(\frac{1}{\sin z} + n\right)\frac{n}{m}.$$

D'où l'on déduit :

$$-\frac{1}{\cos z} = m + \frac{n}{m \sin z} + \frac{n^2}{m},$$

On a aussi :

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{\operatorname{tg} z}{\sin z} = \frac{m}{n \sin z}.$$

Alors, des deux dernières équations, on tire :

$$\sin z = -\frac{1}{n},$$

$$\cos z = -\frac{1}{m}.$$

et on arrive à la relation demandée,

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = 1. \qquad \textbf{(Desboves).}$$

Résoudre le système suivant :

(1) $$x + y + z = a.$$
(2) $$\sin x + \sin y + \sin z = \sin b,$$
(3) $$\cos x + \cos y + \cos z = \cos b.$$

Désignons par u une quantité qui ait pour valeurs $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$. et posons : $\sin x \sin y + \sin x \sin z + \sin y \sin z = p$,

$$\sin x \sin y \sin z = q\,;$$

la question se trouve ainsi ramenée à calculer p et q, puis à résoudre l'équation :

$$u^3 - \sin b \times u^2 + pu - q = 0.$$

Calculons d'abord les trois quantités :

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z,$$
$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z,$$
$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z.$$

En multipliant, membre à membre, les équations (2) et (3) et en tenant compte de l'équation (1), on a :

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z + 2\big(\sin(a-x) + \sin(a-y) + \sin(a-z)\big) = \sin 2b.$$

ou

(5) $$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = \sin 2b - 2\sin(a-b).$$

Elevons maintenant au carré les deux membres des équations (2) et (3) et retranchons-les par ordre. Nous aurons :

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos^2 z + 2\big[\cos(a-x) + \cos(a-y) + \cos(a-z)\big] = \cos 2b.$$

ou

(6) $$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 1 - 2\sin^2 b - 2\cos(a-b).$$

Si ensuite on remplace, dans l'équation précédente, $\cos 2x$, $\cos 2y$, $\cos 2z$ par leurs valeurs en fonction du sinus de l'arc simple, on a :

(7) $$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 2\cos^2\frac{a-b}{2} + \sin^2 b.$$

Il est maintenant facile de calculer p et q, on a :

$$2p = 2(\sin x \sin y + \sin x \sin z + \sin y \sin z) = \sin^2 b - (\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z),$$

et en remplaçant la deuxième parenthèse par la valeur que donne l'équation (7), on obtient : $$p = -\cos^2\frac{a-b}{2}.$$

On a ensuite, d'après la formule (1) :

$$4q = \sin(y+z-x) + \sin(x+z-y) + \sin(x+y-z) - \sin(x+y+z).$$
$$= \sin(a-2x) + \sin(a-2y) + \sin(a-2z) + \sin a,$$
$$= \sin a(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z) - \cos a(\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z) - \sin a.$$

Remplaçant maintenant, dans le dernier membre, les deux quantités entre parenthèses par les valeurs qui donnent les équations (5) et (6), on a :

$$q = -\sin b \cos^2\frac{a-b}{2}.$$

L'équation à résoudre est due :

$$u^3 - \sin b \times u^2 - \cos^2\frac{a-b}{2} \times u + \sin b \,\mathrm{co}^2\frac{a-b}{2} = 0,$$

ou $$u^2(u - \sin b) - \cos^2\frac{a-b}{2}(u - \sin b) = 0,$$

ou $$(u - \sin b)\left(u^2 - \cos^2\frac{a-b}{2}\right) = 0.$$

Les valeurs de sin x. sin y, sin z, sont donc les suivantes :

$$\sin b, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a-b}{2}\right), \quad \sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

et x, y, z sont données par les formules :

$$x = m\pi + (-1)^m b,$$
$$y = m'\pi + (-1)^{m'}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}\right),$$
$$z = m''\pi + (-1)^{m''}\left(\frac{a-b}{2} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Mais, on voit facilement que la somme $x + y + z$ ne peut être égale à a que si l'on donne à m, m'' des valeurs paires $2n$, $2n''$ et à m' une valeur impaire $2n' + 1$.

On a alors :

$$x = 2n\pi + b,$$
$$y = (4n' + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{a-b}{2},$$
$$z = (4n'' - 1)\frac{\pi}{2} + \frac{a+b}{2}.$$

et, pourvu que n, n', n'' soient des nombres entiers, positifs ou négatifs. dont la somme soit nulle, les formules précédentes, comme on le vérifiera aisément, satisferont aux trois équations du problème.

TROISIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Problèmes de géométrie élémentaire, groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution, par Yvan Alexandroff, professeur de mathématiques au lycée de Tambow (Russie), traduit du russe, sur la sixième édition, par D. Aitoff. (Librairie scientifique, A. Hermann, 8, rue de la Sorbonne).

Cet ouvrage, très intéressant, a ceci de particulier qu'il classe les problèmes d'après les méthodes à employer pour leur résolution.

M. Alexandroff s'attache surtout aux méthodes suivantes : lieux géométriques, similitude, constructions inverses, symétrie, translation, rotation, inversion, application de l'algèbre à la géométrie. En tête de chaque chapitre est un exposé de la méthode à employer, suivi d'un nombre considérable de problèmes types, avec une solution complète pour chacun d'eux. Puis, viennent les exercices pouvant être facilement résolus, si l'on s'est bien assimilé la marche suivie dans les problèmes résolus.

Cette classification offre les plus grands avantages et donne les meilleurs résultats.

Le livre de M. Alexandroff comble une véritable lacune et nous ne doutons pas qu'il ait le même succès en France qu'en Russie, où il a atteint en peu de temps sa sixième édition.

Notions complémentaires sur les courbes usuelles, par P. Barbarin, professeur de mathématiques élémentaires au lycée de Bordeaux (Librairie Nony et Cie, 33, boulevard Saint-Germain).

Cet opuscule a été rédigé tout spéciatement pour les élèves de la classe supérieure de Mathématiques élémentaires.

Peu de traités de ce genre présentent la même clarté et le même intérêt. Les questions y sont traitées par des méthodes toujours simples, et les candidats ne pourront que tirer le plus grand profit de la lecture de cette brochure.

Sur les transformées des radicaux doubles réels ou imaginaires, par Léon Moreau, docteur en sciences physiques et mathématiques (Bruxelles, Charles Rozez, 81, rue de la Madeleine. — Paris, Giard et Brière, éditeurs, 16, rue Soufflot).

Cette brochure commence par un exposé très net de la théorie des nombres complexes.

Les divers cas de transformation des radicaux y sont ensuite traités d'une façon très ingénieuse, en partie nouvelle, et où notamment se trouve établie clairement la discussion relative à la fixation des signes.

Ce petit ouvrage se recommande par lui même à tous ceux qu'intéressent les mathématiques, professeurs et candidats.

Géométrie cotée, par Lucien Ibach, directeur de l'Ecole Malesherbes et G. Mariaud, professeur à Sainte-Barbe.

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge du livre de *Géométrie cotée* de MM. Ibach et Mariaud. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que toutes les questions y sont traitées de la façon la plus complète. Pour chaque question, les auteurs ne se contentent pas d'une solution : presque toutes comportent plusieurs solutions, qui y sont exposées et développées. Dans chaque cas particulier, l'élève pourra choisir la plus rapide et la plus élégante et s'habituer à faire ainsi sans difficulté et dans le temps voulu les épures comprises dans les programmes des Ecoles.

Le traité est divisé en deux parties : le *texte* et les *planches*. Cette dernière partie comprend 235 planches admirablement gravées et qui ne peuvent que faciliter le travail du candidat. Rien n'a été négligé dans ce but.

Comme le dit dans sa préface M. Klein, directeur de l'Institut commercial, qui a bien voulu présenter ce livre aux lecteurs : « Ce traité, bien « étudié, bien conçu dans l'esprit des programmes, contient tout ce qu'un

« candidat sérieux doit posséder ; il rendra des services signalés aux jeunes « gens... et il se distingue très nettement et très avantageusement de tous « ceux qui ont été écrits avant lui. »

Opinions et Curiosités touchant la Mathématique, d'après les ouvrages français des XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, par Georges MAUPIN, licencié ès sciences mathématiques et physiques. 1 vol. in-8° carré de 200 pages, avec figures, cartonné à l'anglaise. Prix : 5 francs (Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine, Paris).

Quelles opinions avaient de l'utilité des mathématiques dans les siècles précédents non seulement les savants, mais surtout les faiseurs de livres et même les ignorants ? Quels avantages pensait-on en retirer pour l'éducation ; quelle liaison singulière voulait-on établir entre la doctrine mathématique et la religion ? Voilà ce qui est traité dans ce volume. En donnant des extraits curieux et piquants des auteurs qu'il cite, M. Maupin ne s'est permis d'y ajouter que de brefs commentaires et de courtes notes biographiques, ne voulant rien ôter de leur caractère aux textes mentionnés. Ajoutons que ce n'est pas là un ouvrage savant et que, dans ses parties les plus saillantes, on s'est efforcé de le rendre intelligible à tous ceux qui ont en mathématiques des connaissances moyennes. Ce livre a, par ailleurs, un côté documentaire qui séduira les personnes qu'intéresse l'évolution de l'esprit mathématique à travers les graves querelles d'écoles et les discussions brûlantes des dogmatistes. — Les mathématiciens trouveront un vif intérêt à cette excursion rétrospective dans le domaine de la géométrie, et les curieux, que n'effrayent pas les soutenances imprévues, prendront plaisir à l'intervention des mathématiques dans le dogme de la Présence réelle. — D'autre part, le volume de M. Maupin, en tout décidément instructif, nous donne, en manière d'actualité, des aperçus originaux sur ce que pensaient de l'utilité du latin dans l'enseignement les maîtres d'autrefois. — Rien des idées que nous émettons aujourd'hui sur ce sujet sont, à la vérité, celles d'hier et nous devons au livre de M. Maupin la satisfaction de l'apprendre.

Le *Journal du Ciel*, revue scientifique couronnée par l'Académie des sciences (directeur : Joseph VINOT ✠, lauréat de l'Institut), cours de Rohan, Paris, est un journal de vulgarisation des plus intéressants. Ses notions populaires d'astronomie pratique sont à la portée de tous.

Par une ingénieuse combinaison, le *Journal du Ciel* prête à chacun de ses abonnés une lunette grossissant cinquante fois en diamètre.

L'Enseignement Mathématique, revue internationale paraissant tous les deux mois. *Directeurs* : C. A. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur à l'Ecole Polytechnique et H. FEHR, Privat-docent à l'Université de Genève,

professeur au Collège et à l'Ecole professionnelle. — Editeurs : Carré et Naud, 3, rue Racine.

Cette nouvelle revue se présente sous les auspices de deux hommes qui occupent une haute situation dans le monde scientifique : M. Laisant, dont on connaît les remarquables travaux scientifiques et M. Fehr, qui est un des savants les plus distingués de la Suisse.

C'est assez dire que cette revue offrira le plus grand intérêt à tous ceux qui suivent le mouvement scientifique.

Cette publication a un caractère franchement et hautement international et le comité se compose des plus éminents mathématiciens de toutes les nations. Chaque numéro contiendra, en principe : 1° des articles généraux; 2° des études pédagogiques; 3° une chronique et des correspondances; 4° une partie bibliographique. La philosophie scientifique y tiendra sa place et les articles qu'elle inspirera ne manqueront pas d'offrir au lecteur un attrait tout particulier.

On ne peut qu'applaudir à la fondation de cette œuvre nouvelle, au commencement de ce XXe siècle, puisque ce siècle, comme le disent les directeurs de la revue dans leur premier article : « Soit au point de vue « de la science pure, soit à celui des applications manifestera des exigences « auxquelles personne ne doit ni ne peut se dérober ».

La technique des rayons X, manuel opératoire de la radiographie et de la fluoroscopie à l'usage des médecins, chirurgiens et amateurs de photographie, par Alexandre Hébert, préparateur à la faculté de médecine (Carré et Naud, 3, rue Racine).

Cet ouvrage correspond à une actualité qui intéresse tout le monde. Tous les journaux scientifiques ont consacré de nombreux articles à cette magnifique découverte du D^r Rœntgen, et la presse quotidienne s'en est emparée au point de vue des faits et des applications pratiques.

M. Hébert a su donner de la technique et de l'emploi des rayons X une idée assez précise, pour permettre au lecteur non encore initié au mode opératoire, de produire chez lui ces rayons et de les appliquer sans difficulté à l'inspection des parties profondes du corps humain.

Il indique au lecteur la façon d'acheter le matériel nécessaire, de l'entretenir en bon état et de s'en servir. S'il veut bien suivre le manuel opératoire, d'ailleurs très simple, que décrit ce petit livre, il aura la surprise d'obtenir, du premier coup et sans effort, des images d'un genre nouveau, dont la beauté ne le cédera en rien à celle des radiographies qui ont été publiées un peu partout.

Le Directeur-gérant,
Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE St-CYR

424. Mathématiques. — On donne dans un plan deux cercles de centres O et O′ et qui se coupent aux points A et B. Par le point A on mène dans le plan une droite quelconque, qui coupe le premier cercle en A et C et le second en A et C′, et l'on forme le triangle BCC′. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle BCC′, et soient E et E′ les centres des cercles ex-inscrits à ce même triangle, et situés, le premier dans l'angle C et le second dans l'angle C′.

1° Trouver le lieu décrit par chacun des points I, E, E′ quand la droite ACC′ tourne autour du point A ;

2° Mener la droite ACC′ de façon que l'aire du triangle BCC′ soit la plus grande possible ;

3° Mener la droite ACC′ de façon que l'aire du triangle IEE′ soit la plus grande possible ;

4° Dans quel cas la position de la droite ACC′, pour laquelle l'aire du triangle BCC′ est la plus grande possible, est-elle aussi celle pour laquelle l'aire du triangle IEE′ est la plus grande possible ?

425. Epure. — Un cône oblique à base circulaire a pour base une circonférence C de centre O et de rayon égal à 35 millimètres, située dans le plan horizontal de cote zéro. Son sommet S est déterminé par sa projection S située à une distance OS = 50 millimètres du point O et par sa cote égale à 109 millimètres, *a* est la projection horizontale d'un point A de cote égale à 30 millimètres. Sa distance *aα* au plan vertical OS est égale à 40 millimètres et la distance Oα est égale à 60 millimètres.

Mener par le point A un plan qui détermine dans le cône donné une section anti-parallèle C′. Construire la projection horizontale de cette section ; déterminer ses axes et les points qui se trouvent sur le contour apparent du cône.

Construire les projections des sphères passant ;

1° Par la base C et le sommé S ;

2° Par la circonférence C′ et le sommet S ;

3° Par les deux circonférences C et C′. Les plans des intersections de ces trois sphères prises deux à deux se coupent suivant une même droite. La déterminer.

426. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant :

$$a = 4694 ;\ b = 8286 ;\ c = 6521.$$

427. Questions posées à l'oral. — On a deux droites qui se coupent ; on donne sur l'une de ces droites deux points A et B et sur la seconde deux autres points C et D placés de telle façon que l'on a $OA + OB = OC + OD$; quelle conclusion en tirez-vous ? Démontrer que ces quatre points sont situés sur une même circonférence.

— Résoudre l'équation :

$$\text{tang}\, x - \text{cotg}\, x = \text{cotg}\, x - 4.$$

— Ecrire l'équation :

$$(m^2 - m - 2)x^2 + 2(m - 1)x + 2 = 0.$$

Déterminer m de façon que cette équation ait une racine et une seule comprise entre -1 et $+1$.

— Dans un triangle isocèle on donne la base et la bissectrice d'un des angles à la base. Calculer la longueur du côté autre que la base aboutissant à cet angle.

— Résoudre l'équation :

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d.$$

— Etant donnés une droite et un point A sur cette droite, décrire d'un point extérieur B une circonférence coupant la droite donnée en deux points tels que l'on ait :

$$AP + AQ = K^2.$$

— Construire un triangle connaissant deux côtés et la droite issue du sommet A et coupant l'autre côté en un point M tel que $\dfrac{MC}{MB} = K$.

— On donne dans un triangle ABC l'angle A et le rapport $\dfrac{b - c}{ha} = K$. Calculer les éléments du triangle.

— Montrer l'identité :

$$\frac{\pi}{4} = 2 arc \text{ tg } \frac{1}{3} + arc \text{ tg } \frac{1}{7}.$$

— Sachant que l'on a la relation :

$$\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b,$$

trouver la relation qui existe entre les arcs a et b.

— Construire une ellipse connaissant un foyer et trois tangentes. Les trois tangentes et le foyer donnés déterminent-ils toujours une ellipse ? Quand déterminent-ils une hyperbole ? — une parabole ?

— Résoudre l'équation :

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c.$$

— Etant donné un triangle, trouver sur un côté un point équidistant de l'un des deux autres côtés et du pied de la hauteur abaissée sur le 3e côté.

— Calculer la surface du polygone régulier de 20 côtés.

— On donne une droite AB et un point C sur cette droite ; à chacune de ses extrémités on élève une perpendiculaire. Construire un triangle équilatéral ayant un sommet en C et ses deux autres sommets respectivement sur chacune des perpendiculaires.

— On donne un trapèze. Prendre un point sur chaque base, de telle sorte que la droite qui les joints partage le trapèze en deux parties équivalentes ? Combien y a-t-il de solutions ?

Construire l'expression $\sqrt{\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}}$, a et b étant deux longueurs données.

— On donne dans un triangle deux côtés et l'angle compris. Calculer la longueur de la bisectrice.

— Déterminer m dans l'expression $x^2 - mx + m - 1$, de façon que cette expression soit un carré parfait.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

428. Mathématiques. — Un industriel doit répartir une gratification entre ses ouvriers, composés d'hommes, de femmes et d'enfants. Chaque homme reçoit 80 centimes ; chaque femme reçoit $\frac{2}{3}$ de franc ; chaque enfant reçoit 60 centimes.

Les hommes réunis reçoivent autant que les femmes et les enfants réunis ; les femmes réunies reçoivent le double de la somme reçue par les enfants réunis.

On demande quel est le montant de la somme totale distribuée aux ouvriers, sachant que cette somme est la plus petite somme compatible avec les données du problème.

Calculer le nombre des hommes, celui des femmes et celui des enfants.

429. Physique. — Un vase a la forme d'un tronc de cône de révolution reposant sur sa petite base, Le rayon de celle-ci est $0^m,07$ et l'inclinaison des arêtes $60°$. Il contient un liquide qui s'élève à $0^m,10$ de hauteur. On y plonge verticalement un cylindre droit plein dont la densité est les 0,7 de celle du liquide ; son rayon est $0^m,05$ et sa hauteur $0^m,10$.

Trouver : 1° quelle sera la hauteur de la partie immergée quand le cylindre vertical sera flottant ;

2° De combien se sera élevé le niveau du liquide qui l'environne ;

3° L'augmentation de pression par centimètre carré du fond du vase. On calculera d'abord le rayon du cercle qui est à ce niveau.

430. Calcul logarithmique. — Calculer à 0,0001 près l'expression :

$$x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{(1+\pi)^2}} \times \frac{(1,2345)^5}{2\sqrt{7,2348}}.$$

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

431. Mathématiques. (*Obligatoire*). — On donne l'équation :

$$(12m + 7)x^2 - 3(14 - 3m)x + 11 - 3m = 0.$$

On demande les valeurs qu'il faut attribuer à m:

1° Pour que les racines soient réelles ;

2° Pour qu'il y ait une racine double ;

3° Pour que l'unité soit comprise entre les racines.

(*Au choix*). — *a*) Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

b) Cas de similitude des triangles.

c) Enoncer et démontrer les théorèmes qui conduisent à la détermination du volume de la sphère.

432. Physique. (*Obligatoire*). — Une masse d'air est emprisonnée dans un cylindre vertical fermé à la partie supérieure par un piston du poids de $10^{kg},200$.

1° Calculer la force élastique de cette masse d'air, sachant que

la pression égale 750 millimètres ; que la densité du mercure est 13,6 et que la section droite du cylindre égale 10 centimètres carrés ;

2° On place sur le piston un poids de 20 kilos. Calculer la hauteur dont se déplacera le piston. La distance qui sépare la base du cylindre de la partie supérieure du piston est, dans la première partie de l'expérience, de 3 décimètres.

(*Au choix*). — *a*) Définition et théorie du solénoïde.

b) Machine à vapeur.

c) Pile voltaïque.

Les propriétés, ses principales modifications.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

132. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Résoudre le système :

$$x + y = a$$
$$x^3 + y^3 = ab^2.$$

(*Au choix*). — *a*) Propriété de la bissectrice de l'angle d'un triangle.

b) Volume du triangle tournant.

c) Démontrer que deux pyramides triangulaires, ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales, ont même volume.

133. Physique. (*Obligatoire*). — Une lunette astronomique est dirigée vers un objet très éloigné : un observateur place d'abord l'oculaire dont la distance focale est de 1 centimètre de manière à former l'image virtuelle définitive à 15 centimètres de cette lentille. Il le déplace ensuite, de manière à obtenir une image définitive réelle, se formant encore à 15 centimètres de l'oculaire. Quels sont le sens et la grandeur du déplacement subi par l'oculaire entre les deux expériences ? quel est le rapport des grandeurs linéaires des images définitives ainsi obtenues ?

(*Au choix*). — *a*) Détermination de la chaleur spécifique d'un corps solide par la méthode des mélanges.

b) Courants d'induction. Induction par courant ; induction par aimant.

c) Manomètre à air comprimé.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

434. Arithmétique. — Un industriel doit répartir une gratification entre ses ouvriers, composés d'hommes, de femmes et d'enfants. Chaque homme reçoit 80 centimes ; chaque femme reçoit 2/3 de franc ; chaque enfant reçoit 60 centimes.

Les hommes réunis reçoivent autant que les femmes et les enfants réunis ; les femmes réunies reçoivent le double de la somme reçue par les enfants réunis.

On demande quel est le montant de la somme totale distribuée aux ouvriers, sachant que cette somme est la plus petite somme compatible avec les données du problème. Calculer le nombre des hommes, celui des femmes et celui des enfants.

435. Géométrie. — Inscrire un triangle ABC dans un cercle donné, de manière que ces côtés, prolongés s'il est nécessaire, passent par trois points donnés, M, N, P.

436. Calcul logarithmique. — Calculer la valeur de x définie par l'expression :

$$x = \frac{\sqrt[5]{21^2 \times 173^3}}{\sqrt[6]{0{,}00527 \times 1{,}2748}}.$$

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

437. Arithmétique. — Une personne a placé chez un banquier, à intérêts simples, une certaine somme qui, après 10 mois de placement, est devenue égale à 12 600 francs, capital et intérêts réunis. La personne laisse encore ses fonds aux mêmes conditions pendant 2 ans et demi. Elle retire ses fonds et touche 14 490 francs. Quel était le taux de l'intérêt ? Quelle était la la somme primitive placée chez le banquier ?

438. Géométrie. — Deux circonférences concentriques étant données, tracer un triangle dont les angless ont donnés et qui ait deux sommets sur l'une des circonférences et le 3e sur l'autre.

439. Algèbre. — Résoudre l'équation :

$$\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1.$$

440. Calcul logarithmique. — Calculer :

$$x = \frac{2}{5}\sqrt[7]{\frac{205 \times 13 \times \sqrt{\pi}}{322 \times \sqrt[3]{\frac{3}{7}}}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

I. Questions diverses avec solutions

On considère le triangle BAC *rectangle ne* A *et les médianes* BB′ *et* CC′ *issues des sommets* B *et* C; *on demande d'exprimer le rapport* $z = \frac{BB'}{CC'}$, *en fonction de la tangente trigonométrique de l'angle* ABC. *On représentera cette tangente par* K. *Maximum et minimum de* z *quand on fait varier* K.

Les triangles rectangles ABB′ et ACC′ donnent :

$$\overline{BB'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB'}^2$$

$$\overline{CC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AC'}^2.$$

D'ailleurs
$$AB' = \frac{AC}{2}, \quad AC' = \frac{AB}{2},$$

$$AC = AB \operatorname{tg} B.$$

Donc
$$\overline{BB'}^2 = \overline{AB}^2\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 B}{4}\right)$$

$$= \frac{\overline{AB}^2}{4}(4 + \operatorname{tg}^2 B)$$

$$\overline{CC'}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4}(4 \operatorname{tg}^2 B + 1).$$

D'où
$$\frac{BB'}{CC'} = \sqrt{\frac{4 + \operatorname{tg}^2 B}{4 \operatorname{tg}^2 B + 1}},$$

ou
$$z = \sqrt{\frac{4 + K^2}{4K^2 + 1}},$$

en posant tg B = K.

La quantité z étant essentiellement positive, sa variation sera la même que celle de $z^2 = \frac{4 + K^2}{4K^2 + 1}$.

Les valeurs que peut prendre la quantité z^2 sont celles qui rendent réelles la quantité K^2 tirée de l'équation :

$$z^2(4K^2 + 1) - (4 + K^2) = 0$$

ou
$$K^2(4z^2 - 1) - (4 - z^2) = 0$$

ou
$$K^2 = \frac{4 - z^2}{4z^2 - 1}.$$

Pour que K soit réel, il faut que K^2 soit > 0, ou que l'on ait :

$$(4 - z^2)(4z^2 - 1) > 0.$$

Les deux facteurs devant être de même signe, on aura :

$$4 - z^2 > 0 \quad 4z^2 - 1 > 0$$

c'est-à-dire :
$$4 > z^2 > \frac{1}{4},$$

ou encore :
$$4 - z^2 < 0,$$

$$4z^2 - 1 < 0,$$

ce qui donnerait : $z^2 > 4 \quad z^2 < \frac{1}{4}$,
conditions incompatibles.

La quantité z étant positive, ses maximum et minimum seront 2 et $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire que l'on aura :

$$\frac{1}{2} < 3 < 2.$$

Calculer les dimensions d'un cylindre droit, la surface totale donnée $2\pi a^2$ *inscrit dans une sphère de rayon* R.

Le cylindre étant inscrit dans la sphère, ses deux bases sont symétriques par rapport au centre de la sphère.

Soit x la distance du centre à un des plans de base et y le rayon de base du cylindre.

On a :

(1) $$x^2 + y^2 = R^2$$
et $$2\pi y^2 + 4\pi xy = 2\pi a^2$$
ou
(2) $$y^2 + 2xy = a^2.$$

De (2) nous tirons : $x = \frac{a^2 - y^2}{2y}$.

Et, en substituant dans (1) et ordonnant
(3) $$5y^4 - 2(a^2 + 2R^2)y^2 + a^4 = 0.$$

Pour qu'une valeur de y soit acceptable, il faut qu'elle soit réelle, positive et inférieure à R.

Pour qu'une valeur de y soit réelle, il faut que les racines de l'équation (3) en y^2 soient réelles et positives.

La condition de réalité des racines en y^2 est :
$$(a^2 + 2R^2)^2 - 5a^4 \geqslant 0$$
ou $$(a^2 + 2R^2 - a^2\sqrt{5})(a^2 + 2R^2 + a^2\sqrt{5}) \geqslant 0$$
ou encore
$$\left[2R^2 + a^2(\sqrt{5} + 1)\right]\left[(2R^2 - a^2(\sqrt{5} - 1)\right] \geqslant 0.$$

Ce qui exige que $a^2(\sqrt{5} -) \leqslant 2R^2$
ou
(4) $$a^2 \leqslant \frac{2R^2}{\sqrt{5} - 1}.$$

Supposons cette condition satisfaite. Il faut de plus que les valeurs de y^2 soient positives.

Le produit des racines est : $\frac{a^2}{5} > 0$.

Les deux racines sont donc de même signe ; leur somme $2\frac{a^2 + 2R^2}{5}$ est aussi > 0.

Les deux racines sont donc positives ; donc les quatre racines de y sont réelles : elles sont deux à deux égales et de signes contraires.

Les racines positives seront acceptables si elles sont $<$ R, c'est-à-dire si les racines en y^2 sont $< R^2$.

Le résultat de la substitution de R est :

$$R^4 - 2a^2R^2 + a^4 = (R^2 - a^2)^2 > 0.$$

Donc R^2 est extérieur aux racines en y^2.

Considérons maintenant la demi-somme $\frac{a^2 + 2R^2}{5}$ des racines. On ne peut avoir $R^2 < \frac{a^2 + 2R^2}{5}$; car on en déduirait : $a^2 > 3R^2$, condition incompatible avec $a^2 \leqslant \frac{2R^2}{\sqrt{5} - 1}$, laquelle est supposée satisfaite ; car

$$3R^2 > \frac{2R^2}{\sqrt{5} - 1}.$$

Donc $$R^2 > \frac{a^2 + 2R^2}{5}.$$

Donc, enfin, $R^2 >$ les deux racines en y^2.

Les valeurs de y^2, racines de (3) sont $< R^2$; donc les racines positives en y sont acceptables.

Les solutions du problème sont :

$$y = \sqrt{\frac{a^2 + 2R^2 \pm 2\sqrt{R^4 + a^2R^2 - a^4}}{5}},$$

on en tire :

$$x = \sqrt{\frac{3R^2 - a^2 \mp 2\sqrt{R^4 + a^2R^2 - a^4}}{5}}.$$

Chercher les solutions en nombres entiers, positifs ou négatifs de l'équation : $(3x + y)(x + y) = P$, *où* P *désigne un nombre premier donné. Faire voir que de semblables solutions existent en général, et dire pour quelle valeur particulière du nombre premier* P *elles cessent d'exister.*

On donne $(3x + y)(x + y) = P$, où P est premier.

Je résous par rapport à y.

On a : $$y^2 + 4xy + 3x^2 - P = 0,$$

D'où : $$y = -2x \pm \sqrt{x^2 + P}.$$

Il faut que $x^2 + P$ soit un carré parfait.

Je pose $$x^2 + P = K^2.$$

D'où $$P = K^2 - x^2 = (K - x)(K + x).$$

Or, P étant premier, ne peut être égal à un produit de facteurs premiers, à moins qu'un de ces facteurs soit égal à 1.

J'en conclus $K - x = 1$; d'où $K = x + 1$, alors $x^2 + P = (x + 1)^2$.

D'où $$2x + 1 = P, \text{ ou } x = \frac{P - 1}{2}.$$

Le nombre P étant donné, x n'a qu'une seule valeur.

J'aurai $y = -2x \pm (x + 1)$, ce qui donne :

$$y' = -2x + x + 1 = -x + 1 = -\frac{P - 1}{2} + 1 = \frac{3 - P}{2}.$$

$$y'' = -2x - (x + 1) = -3x - 1 = -\frac{3P - 1}{2}.$$

Pour que x soit entier, il faut que le nombre premier P soit autre que 2, et, comme $P = 1$ et $P = 3$ donneraient soit $x = 0$, soit $y' = 0$, il faut que P′ soit supérieur à 3.

En un même lieu, on lance verticalement de bas en haut dans le vide deux projectiles pesants, le premier avec une vitesse initiale v, *le deuxième* n *secondes plus tard avec une vitesse initiale* x. *On donne* v, n, *ainsi que l'intensité* g *de la pesanteur, et l'on demande quelle doit être la valeur de* x *pour que les deux projectiles se rencontrent à une hauteur* h *au-dessus de leur point de départ. Discussion.*

Je suppose que la rencontre ait lieu avant que le premier mobile ait atteint le plus haut point de sa course, c'est-à-dire pendant la montée des deux projectiles.

Soient θ et θ' les temps que mettent les mobiles pour aller de A en C.

On a :

(1) $$v\theta - \frac{1}{2} g\theta^2 = h$$

(2) $$x\theta' - \frac{1}{2} g\theta'^2 = h$$

avec la condition :

(3) $$\theta = n + \theta'.$$

L'équation (1) s'écrit :

$$g\theta^2 - 2v\theta + 2h = 0.$$

D'où :

$$\theta = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2gh}}{g},$$

mais θ doit être plus petit que $\frac{v}{g}$, temps que mettrait le mobile pour aller de A en B. Il faut donc prendre le signe — devant le radical.

Alors :

$$\theta = \frac{v - \sqrt{v^2 - 2gh}}{g},$$

et

$$\theta'' = \theta - n = \frac{v - \sqrt{v^2 - 2gh - n}}{g}.$$

Il faut avoir $v^2 > 2gh$,

$$v - ng - \sqrt{v^2 - 2gh} > 0$$

ou

$$n < \frac{v - \sqrt{v^2 - 2gh}}{g}.$$

L'équation (2) donne :

$$x = \frac{2h + g\theta'^2}{2\theta'},$$

ou

$$x = \frac{2hg + (v - \sqrt{v^2 - 2gh} - ng)^2}{2(v - \sqrt{v^2 - 2gh} - ng)}.$$

Si, au contraire, on suppose que la rencontre ait lieu pendant la descente du premier mobile, il faut exprimer que le temps mis par le premier mobile pour aller de A en B, augmenté de celui qu'il met pour descendre de B en C, est égal à $\theta' + n$.

Pour aller de A en B, le mobile met un temps égal à $\frac{v}{g}$. En descendant de B en C, il parcourt l'espace AB — h ou $\frac{v^2}{2g} - h$, et l'on a l'équation :

$$\frac{v^2}{2g} - h = \frac{1}{2} gt'^2.$$

ou

$$v^2 - 2gh = gt'^2$$
$$t' = \frac{\sqrt{v^2 - 2gh}}{g}.$$

Le temps employé par le premier mobile est donc :

$$\frac{v}{g} + \frac{\sqrt{v^2 - 2gh}}{g}.$$

Le second mobile parcourt h.

On a :

$$h = x\theta' - \frac{1}{2} g\theta'^2$$

ou

$$2h = 2x\theta' - g\theta'^2,$$
$$g\theta'^2 - 2x\theta' + 2h = 0,$$

équation qui donne :

$$\theta' = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2gh}}{g}.$$

Il faut prendre le signe —, parce que $\theta' < \frac{x}{g}$.

On aura donc l'équation :

$$\frac{v}{g} + \frac{\sqrt{v^2 - 2gh}}{g} = n + \frac{x - \sqrt{x^2 - 2gh}}{g}.$$

ou

$$v + \sqrt{v^2 - 2gh} = ng + x - \sqrt{x^2 - 2gh}$$

ou

$$(v + \sqrt{v^2 - 2gh} - ng)^2 + x^2 - 2x(v + \sqrt{v^2 - 2gh} - ng) = x^2 - 2gh.$$

D'où :

$$x = \frac{2gh + (v + \sqrt{v^2 - 2gh} - ng)^2}{v + \sqrt{v^2 - 2gh} - ng},$$

formule qui ne diffère de celle trouvée plus haut que par le signe placé devant le radical.

Deux points mobiles M *et* N *se meuvent, avec des vitesses constantes* v *et* v' *sur deux droites rectangulaires* OX *et* OY. *A un moment donné, ils se trouvent respectivement en* A *et* B, *à ces distances* a *et* b *du point* O. *On demande de chercher à quelle époque leur distance sera égale à une longueur donnée* d. *On demande en outre à quel moment la distance des deux mobiles sera la plus petite et quelle sera alors cette distance. Discussion.*

I. Soit t le temps cherché, v et v' les vitesses sur Ox et Oy. Soit $OM = x$ et $ON = y$.

On a :

$$x = a + vt$$
$$y = b + v't.$$

Par suite :

$$(a + vt)^2 + (b + v't)^2 = d^2$$

et

$$(v^2 + v'^2)t^2 + 2(av + bv')t + a^2 + b^2 - d^2 = 0.$$

$$t = \frac{-(av + bv') \pm \sqrt{(av + bv')^2 - (v^2 + v'^2)(a^2 + b^2 - d^2)}}{v^2 + v'^2}.$$

La condition de réalité des racines est

$$-(bv - av')^2 + d^2(v^2 + v'^2) > 0$$

$$\left(d + \frac{bv - av'}{v^2 + v'^2}\right)\left(d - \frac{bv - av'}{v^2 + v'^2}\right) > 0,$$

ce qui donne pour le minimum de d :

$$d = \frac{bv - av'}{v^2 + v'^2},$$

avec

$$t = \frac{-(av + bv')}{v^2 + v'^2}.$$

La distance devient nulle, si $\frac{a}{b} = \frac{v}{v'}$. Les deux mobiles passent alors au même instant au point O, et l'on trouve pour le temps $t = -\frac{a}{v}$.

II. *Premier cas.* — On a

$$OA = x = at.$$
$$OB = y = bt^2.$$

Eliminant t entre ces deux relations, on obtient :

$$y = \frac{b}{a^2}x^2,$$

équation d'une parabole tangente à son sommet à l'axe des x.

Deuxième cas. — On a

$$x = at^2$$
$$y = bt^2.$$

Par suite $ay = bx$, équation d'une droite passant par l'origine.

Soit O *le centre d'un cercle de rayon* R. *Par un point* P *pris à l'intérieur du cercle à la distance* a *du centre, on mène la corde* AC *faisant l'angle* α *avec* PO *et la corde* BD *perpendiculaire à* AC. *Calculer, en fonction des quantités* R, a *et* α :

1° *Les longueurs* PA, PB, PC, PD ;

2° *La surface du quadrilatère* ABCD ;

3° *Etudier la variation de cette surface en supposant que* a *et* R *sont constants et que* α *varie.*

On mène OI perpendiculaire à la corde AC.

On a :

$$PA = AI + IP = CI + IP = PC + 2PI.$$

D'où :

$$PA - PC = 2PI$$

et, dans le triangle rectangle OIP :

$$PI = a \cos \alpha.$$

D'où :

(1) $$\text{PA} - \text{PC} = 2a \cos x.$$

La propriété connue des sécantes dans le cercle donne :

$$\text{PA} - \text{PC} = \text{PM} \times \text{PN} = (\text{R} - a)(\text{R} + a)$$

ou

(2) $$\text{PA} \times \text{PC} = \text{R}^2 - a^2$$

PA et PC sont les racines de l'équation :

(3) $$z^2 - 2a \cos x z - (\text{R}^2 - a^2) = 0.$$

Les racines sont :

(4) $$\text{PA} = \sqrt{\text{R}^2 - a^2\sin^2 x} + a \cos x$$

(5) $$\text{PC} = \sqrt{\text{R}^2 - a^2\sin^2 x} - a \cos x.$$

Pour avoir PB et PD, il faut remplacer dans PA et PC l'angle x par $x + \frac{\pi}{2}$.

On a :

(6) $$\text{PB} = \sqrt{\text{R}^2 - a^2\cos^2 x} - a \sin x$$

(7) $$\text{PC} = \sqrt{\text{R}^2 - a^2\cos^2 x} + a \sin x.$$

La surface du quadrilatère ABCD est égale à la moitié du produit des diagonales :

(8) $$\text{S} = \frac{1}{2}\,\text{AC} \times \text{BD} = 2\sqrt{(\text{R}^2 - a^2\sin^2 x)(\text{R}^2 - a^2\cos^2 x)}.$$

Les deux facteurs variables ayant une somme constante, le maximum de leur produit aura lieu quand ils seront égaux, c'est-à-dire quand on aura :

$$\sin x = \cos x.$$

D'où

$$x = 45°.$$

La valeur maxima de S sera donc :

$$\text{S} = 2\text{R}^2 - a^2.$$

Calculer, sans avoir recours aux logarithmes, les valeurs des arcs x *et* y *qui vérifient les équations :*

$$\text{x} + \text{y} = \text{a},$$
$$\sin^2\text{x} + \sin^2\text{y} = 1 - \cos \text{a}.$$

On sait que l'on a :

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

D'où

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

De même.

$$\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}.$$

Donc

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \frac{\cos 2x + \cos 2y}{2}.$$

D'ailleurs :

$$\cos 2x + \cos 2y = 2 \cos (x + y) \cos (x - y) = 2 \cos a \cos (x - y).$$

L'équation :

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos a$$

peut donc s'écrire :

$$1 - \cos a \cos (x - y) = 1 - \cos a$$

ou $$\cos a \cos (x - y) = \cos a$$
si $\cos a$ est différent de a, on a :
$$\cos (x - y) = 1.$$
D'où $$x - y = 2K\pi.$$
Les arcs x et y sont alors déterminés par les équations :
$$x - y = a \quad x - y = 2K\pi,$$
K étant un nombre entier positif ou négatif.

D'où, en ajoutant :
$$2x = a + 2K\pi; \quad x = \frac{a}{2} + K\pi.$$
Et, en retranchant :
$$2y = a + 2K\pi; \quad y = \frac{a}{2} - K\pi.$$
Si $\cos a = 0$, on a $a = K\pi + \frac{\pi}{2}$, et en particulier pour $K = 0$, $a = \frac{\pi}{2}$.

y est alors le complément de x, et l'on a :
$$\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$
qui est une identité, puisque
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x.$$

Partageons la série
$$\alpha = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{8.9.10} + \dots$$
en groupes contenant : le premier, le premier terme ; le second, les deux suivants ; le troisième, les quatre suivants ; le quatrième, les huit suivants ; etc. Faire voir que chaque groupe est : 1° *plus grand que le quart du précédent* ; 2° *plus grand que la moyenne géométrique de ses deux voisins. Tirer de là un moyen facile de calculer la valeur de la série*
$$\beta = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$
avec une approximation aussi grande qu'on veut. (Bromcker, *Phil. Trans.*, 1668).

I. — La première partie se démontre, plus simplement que ne l'a fait Brouncker, en remarquant qu'on a à démontrer l'inégalité
$$\frac{1}{4n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$
ou bien, comme chaque terme est divisible par $n + 1$, à démontrer la suivante $(2n + 1)(2n + 3) < (2n + 3)(n + 2) + n(2n + 1)$
ce qui est facile. Par conséquent, on a
$$\frac{1}{2.3.4} < \frac{4}{4.5.6} + \frac{4}{6.7.8}$$
$$\frac{1}{4.5.6} < \frac{4}{8.9.10} + \frac{4}{10.11.12}, \quad \frac{1}{6.7.8} < \frac{4}{12.14.16} + \frac{4}{16.17.18}$$
$$\frac{1}{8.9.10} < \frac{4}{16.17.18} + \frac{4}{18.19.20}, \dots \quad \frac{1}{14.15.16} < \frac{4}{28.29.30} + \frac{4}{30.31.32}$$
. . . .

C.Q.F.D.

II. — Pour la seconde partie, — que Bromcker n'a ni démontrée, ni même énoncée explicitement, — appelons u_n le n^e terme $\frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)}$; nous allons d'abord montrer qu'on a

$$\frac{u_{2n}+u_{2n+1}}{u_n} > \frac{u_{2n+2}+u_{2n+3}}{u_{n+1}}.$$

Ou bien
$$\frac{\frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)}}{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}$$
$$> \frac{\frac{1}{(2n+4)(2n+5)(2n+6)}+\frac{1}{(2n+6)(2n+7)(2n+8)}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}}.$$

En effet, en multipliant les numérateurs et les dénominateurs, dans le premier membre, par $n+1$, dans le second par $n+3$, puis réduisant, il vient
$$1+\frac{3}{4n^2+8n+3} > 1+\frac{3}{4n^2+24n+35}.$$

Ceci posé, on en déduit, en faisant successivement $n=k$, $k+1$, $k+2$, ... $2k-1$, $2k$, $2k+1$, ... $4k-1$,
$$\frac{n_{2k}+u_{2k+1}}{u_k} > \frac{u_{2k+2}+u_{2k+3}}{u_{k+1}} > \ldots > \frac{u_{4k-2}+u_{4k-1}}{u_{2k-1}}$$
$$> \frac{u_{4k}+u_{4k+1}}{u_{2k}} > \ldots > \frac{u_{8k-2}+u_{8k-1}}{u_{4k-1}}.$$

Or, dans une suite de rapports décroissants, le rapport de la somme des numérateurs à celle des dénominateurs est compris entre le premier et le dernier. On a donc :
$$\frac{u_{2k}+\ldots+u_{4k-1}}{u_k+\ldots+u_{2k-1}} > \frac{u_{4k-2}+u_{4k-1}}{u_{2k-1}} > \frac{u_{4k}+u_{4k+1}}{u_{2k}} > \frac{u_{4k}+\ldots+u_{8k-1}}{u_{2k}+\ldots+u_{4k-1}}.$$

C.Q.F.D.

III. — Appelons A, B, C, D,... les groupes successifs : on a d'après I,
$$B=B,\quad C>\frac{B}{4},\quad D>\frac{B}{4^2},\quad E>\frac{B}{4^3},\ldots$$
d'où
$$A+B+C+D+\ldots > A+B+\frac{B}{4}+\frac{B}{4^2}+\frac{B}{4^3}+\ldots = A+\frac{4}{3}B$$
et d'après II, $C<\frac{B^2}{A}$, $D<\frac{B^3}{A^2}$, $E<\frac{B^4}{A^3}$, $F<\frac{B^5}{A^4}$,...
d'où
$$A+B+C+D+\ldots < A+B+\frac{B^2}{A}+\frac{B^3}{A^2}+\frac{B^4}{A^3}+\ldots = \frac{A^2}{A-B}.$$

Par le calcul direct, on trouve
$$A=\frac{1}{2.3.4}=0{,}04167,\qquad B=\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}=0{,}0113$$
donc la somme de la série est comprise entre 0,0567 et 0,0572.

Brouncker, poussant le calcul jusqu'au cinquième groupe $E=\frac{1}{32.33.34}+\ldots+\frac{1}{62.63.64}$, trouve que la série est comprise entre $A+B+C+D+\frac{4}{3}E = 0{,}0568279$ et $A+B+C+D+\frac{E^2}{D-E}=0{,}0568290$.

IV. — On a

$$B = 1 - \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \dots\right)$$

Or, la partie entre parenthèses est égale à

$$\frac{1}{2.3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4.5}\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6.7}\left(1 - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \dots\right)$$

$$= \frac{3}{2.3.4} + \frac{5}{4.5.6} + \frac{7}{6.7.8} + \dots + \alpha$$

$$= \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.8} + \dots + \alpha$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots\right) + \alpha$$

La première de ces deux dernières séries est égale à l'unité puisqu'elle équivaut à

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

On a donc $\beta = 1 - \frac{1}{4} + \alpha = 0{,}75 + \alpha.$

Le calcul de β est donc ramené à celui de α. (**A. Aubry**).

TROISIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

La technique des rayons X, manuel opératoire de la radiographie et de la fluoroscopie à l'usage des médecins, chirurgiens et amateurs de photographie, par Alexandre Hébert, préparateur à la faculté de médecine (Carré et Naud, 3, rue Racine).

Cet ouvrage correspond à une actualité qui intéresse tout le monde. Tous les journaux scientifiques ont consacré de nombreux articles à cette magnifique découverte du Dr Rœntgen, et la presse quotidienne s'en est emparée au point de vue des faits et des applications pratiques.

M. Hébert a su donner de la technique et de l'emploi des rayons X une idée assez précise, pour permettre au lecteur non encore initié au mode opératoire, de produire chez lui ces rayons et de les appliquer sans difficulté à l'inspection des parties profondes du corps humain.

Il indique au lecteur la façon d'acheter le matériel nécessaire, de l'entretenir en bon état et de s'en servir. S'il veut bien suivre le manuel opératoire, d'ailleurs très simple, que décrit ce petit livre, il aura la surprise d'obtenir, du premier coup et sans effort, des images d'un genre nouveau, dont la beauté ne le cédera en rien à celle des radiographies qui ont été publiées un peu partout.

Le Directeur-gérant,
Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE St-CYR

441. Mathématiques. — On donne une circonférence O et la droite TAT′ tangente en A à cette circonférence. On considère une seconde tangente qui rencontre la 1re en C et qui touche la circonférence en B. La 1re tangente étant fixe et la seconde variable, on demande : 1° le lieu géométrique du centre du cercle inscrit au triangle ABC ; 2° le lieu du centre du cercle circonscrit ; 3° le lieu du point de rencontre des hauteurs ; 4° le lieu du point de rencontre du rayon OB avec la perpendiculaire en C à la tangente TAT′.

442. Epure. — Un tronc de cône droit s'appuie par sa grande base circulaire sur le plan de comparaison. Le rayon R de cette base est de 7 centimètres. L'arête latérale du tronc est de 7 centimètres et fait avec le plan de comparaison un angle de 45°. Dans l'intérieur de ce tronc de cône et sur le même axe est placé un petit cône renversé dont le sommet est au point C et dont la base coïncide avec la base supérieure du tronc. Soit AB l'arête du tronc qui est parallèle au petit côté de la feuille, le point A étant sur la grande base et le point B sur la petite base.

1° Construire l'ensemble des projections des deux corps ;

2° Construire les projections des sections faites dans les deux corps par un plan perpendiculaire à AB au point B.

3° Mener par le point où la verticale du point A perce le plan sécant une tangente à la section faite dans le petit cône.

4° Trouver le point où la tangente perce le tronc de cône.

443. Calcul trigonométrique. — Résoudre ce triangle connaissant :

$$A = 86°28'32'',7$$
$$a = 4684$$
$$b = 3296$$
$$c = 4008.$$

444. Questions posées à l'oral. — Quelles valeurs doit-on donner à p et à q pour que $x^4 + 1$ soit divisible par $x^2 + px + q$.

— On donne un triangle rectangle ABC : on prend un point D sur l'hypothénuse, on abaisse la perpendiculaire DE sur AC ; on demande d'étudier la variation de la somme des surfaces engendrées par BD et DE, lorsque la figure tourne autour de BA, et quand D va du point B au point C.

— Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ former l'équation aux carrés des racines de la proposée. Former l'équation aux cubes des racines de l'équation proposée.

— Comment peut-on former le reste de la division d'un polynome par $x - a$ sans effectuer cette division ? Formation du quotient. Que faut-il pour qu'un polynome soit exactement divisible par les produits $(x - a)(x - b)(x - c)$.

Résoudre l'équation :

$$\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} = 1.$$

— Simplifier l'équation : $\dfrac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}$.

— Pour quelles valeurs de a la fonction $y = \dfrac{x - a}{x^2 - 3x + 2}$ a-t-elle un maximum ou un minimum ?

— Rendre logarithmique l'expression $\dfrac{2 \sin a - \sin 2a}{2 \sin a + \sin 2a}$.

— Calculer le volume d'un tétraèdre étant donnés les 3 côtés du triangle de base et sachant que les trois arêtes sont égales entre elles, leur longueur commune étant donnée.

— Diviser $3x^5 - 7x^3 + 10x^2 + x - 3$ par $x - 2$.

— Chercher si l'expression $\sin^2 x + \sin^2(x + \alpha)$ a un maximum.

— Partager la surface du trapèze ABCD en deux parties équivalentes par une droite DE partant du sommet D. Le point E peut-il tomber sur le prolongement de AB ?

— Exprimer la surface d'un trapèze en fonction des quatre côtés.

— Résoudre l'équation $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x = 1$.

Résoudre le système d'équations :

$$x + ay + a^2z = a^3 \qquad x + by + b^2z = b^3$$
$$x + cy + c^2z = c^3.$$

— Exprimer la surface d'un triangle en fonction du périmètre et des angles.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

445. Mathématiques. — On a mesuré un champ en forme de trapèze rectangle ABCD, et l'on a constaté que le côté oblique est également incliné sur les bases et sur la hauteur ; que ce côté BC avait une longueur de 48 mètres et la petite base CD une longueur de $141^{m},42$.

On demande de :

1° Calculer en ares et en centiares l'aire de ce champ ;

2° D'exprimer le périmètre du trapèze ainsi que celui du carré qui aurait la même surface que le trapèze.

3° De trouver de quelle fraction de la surface vraie l'expression précédemment trouvée serait trop grande s'il était arrivé que la chaîne décamétrique dont on s'est servi pour la mesure des longueurs manquât d'un chaînon de 2 décimètres.

446. Physique. — Le corps de pompe d'une pompe aspirante a une hauteur de 50 centimètres et une section de 80 centimètres carrés.

Le piston parcourt toute la hauteur de ce corps de pompe ; le tuyau d'aspiration, d'une section de 4 centimètres carrés, plonge dans une nappe d'eau, dont la surface libre est à 4 mètres au-dessous de la base inférieure du corps de pompe. Au début, le piston est au bas de sa course et le tuyau d'aspiration plein d'air.

On demande : 1° si l'eau pénétrera dans le corps de pompe à la première ascension du piston ; 2° quel sera l'effort nécessaire pour soulever le piston quand l'eau commencera à s'écouler par le haut du corps de pompe, on négligera le poids et la hauteur du piston.

La pression atmosphérique correspondant à 76 centimètres du mercure de densité 13,6.

447. Calcul logarithmique. — Calcul à 0,0001 près l'expression :

$$x = \sqrt[5]{\frac{(2,1168)^2 \times \pi \times \sqrt[3]{\pi^2}}{0,002 \times \frac{1}{(5,3624)^3}}}.$$

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

448. Arithmétique. (*Obligatoire*). — Soit O le centre d'un cercle de rayon R. Par un point P pris à l'intérieur du cercle à la distance a du centre, on mène la corde HC faisant l'angle α avec TO et la corde BD perpendiculaire à AC. Calculer en fonction des quantités R, a et α.

1° Les longueurs PA, PB, PC, PD ;

2 La surface du quadrilatère ABCD ;

3° Etudier la variation de cette surface en supposant que a et R sont constants et que α varie.

— (*Au choix*). — *a*) Composition de deux forces parallèles ;

b) Volume déterminé par un triangle tournant autour d'un axe ;

c) Logarithmes vulgaires. Définitions et propriétés.

449. Physique. (*Obligatoire*). — Un vase cylindrique en verre est gradué en parties d'égale capacité. Il contient du mercure qui, à la température de 0°, arrive à la division 1150. A quelle température faut-il porter l'appareil pour que le mercure affleure à la division 1151 ? Coefficient de dilatation cubique du verre : 0,000026 ; coefficient de dilatation absolu du mercure : 0,00018.

(*Au choix*). — *a*) Electroscope ;

b) Electrolyse ;

c) Densité des solides.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

450. Mathématiques. (*Obligatoire*). — Etant donné un triangle ABC, mener extérieurement au triangle, dans un plan, une parallèle DD′ au côté BC à une distance x, telle que si l'on fait tourner le triangle autour de DD′, l'aire décrite par BC soit moyenne proportionnelle entre les aires décrites par les deux autres côtés.

(*Au choix*). — *a*) Cas de similitude des triangles.

b) Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

c) Des trièdres.

451. Physique. (*Obligatoire*). — Un volume d'air de V litres primitivement sec à t degrés et à la pression H absorbe de la

vapeur d'eau en quantité telle que l'état hygrométrique devienne E. La pression et la température ne changent pas. On demande quels accroissements de volume et de poids l'air éprouvera. La tension maxima de la vapeur d'eau à t degrés est p.

Application $V = 4$; $t = 20°$; $H = 770$; $E = 0,75$; $f = 17^{mm},5$.

(*Au choix*). — *a*) Lois fondamentales de l'induction par les aimants. Décrire sommairement une machine électro-magnétique.

b) Lors des oscillations du pendule. Pendule simple et pendule composé. Applications.

c) Vibration des cordes. Intervalles musicaux.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

452. Arithmétique. — Un entrepreneur emploie des ouvriers dans deux chantiers différents . dans l'un, il occupe 42 ouvriers pendant 15 jours ; dans l'autre, 35 ouvriers pendant 12 jours. Le salaire journalier d'un ouvrier du 2e groupe est les $\frac{10}{13}$ de celui d'un ouvrier du premier groupe. On demande quel est le salaire quotidien de chacun des ouvriers de chaque groupe, la somme totale payée par l'entrepreneur étant de 6 195 francs.

453. Géométrie. — On considère un cercle et deux diamètres rectangulaires OA, OB. Trouver sur le diamètre OA un point M tel que, si on mène la tangente MP au cercle O et que l'on fasse tourner la figure autour de OA, la surface engendrée par le segment de droite MP soit dans un rapport donné m avec la surface engendrée par l'arc de cercle PB.

454. Calcul logarithmique. — Calculer la valeur de x définie par l'expression :

$$x = \frac{\sqrt[7]{42^3 \times 273^2}}{\sqrt[8]{2,145 \times \pi}}.$$

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

455. Arithmétique. — Dunkerque et Barcelone sont situées sur le méridien de Paris ; et la différence de leur latitude est 9°39′11″.

On demande d'évaluer cette distance : 1° en kilomètres ; 2° en

lieues métriques ; 3° en lieues terrestres ; 4° en lieues marines ; 5° en milles marines — sachant que la lieue métrique vaut 4 kilomètres et que l'on compte, au degré, 25 lieues terrestres, 20 lieues marines et 60 milles marins.

456. Géométrie. — Une sphère de rayon r est posée sur un plan. Un cône droit dont la hauteur est $2r$ et le rayon de base R, repose par sa base sur le même plan. Couper les 2 solides par un plan parallèle au premier, et tel que le volume du tronc de cône compris entre les deux plans soit égal à m fois celui de la portion de la sphère comprise entre les mêmes plans. Discussion.

457. Algèbre. — Résoudre l'équation :

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{b}{c}.$$

Construire la racine trouvée.

458. Calcul logarithmique.

$$\text{Calculer } x=\frac{4}{7}\sqrt[5]{\frac{2184+\pi\times\frac{1}{\pi}}{(3,428)^3\times\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

I. Questions diverses avec solutions

Circonscrire à un triangle donné ABC *une ellipse ou une hyperbole dont les foyers soient situés sur les côtés de ce triangle.*

1° Ellipse

Soient F et F′ les foyers situés sur $AC = b$ et $AB = c$, et posons : $AF = x$, $AF' = y$, on aura, en tirant BF et CF′ :

$$BF' + BF = CF' + CF = x + y = \text{grand axe},$$

d'où

$$c - y + \sqrt{c^2 + x^2 - 2cx\cos A} = x + y$$
$$b - x + \sqrt{b^2 + y^2 - 2by\cos A} = x + y$$

il en résulte les équations rationnelles :

(1) $$x(x + y) = b\left(x + y\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

(2) $$y(x + y) = c\left(y + x\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

en divisant membre à membre (1) et (2) et posant $x = Uy$, il vient :

(3) $$cU^2\sin^2\frac{A}{2} - (b - c)U - b\sin^2\frac{A}{2} = 0.$$

Supposons $b > c$; on voit alors que l'équation (3) a ses racines réelles, de signes contraires, et que la positive est la plus grande en valeur absolue. Si l'on y fait successivement $U = -1$ et $U = 0$, on voit que le premier membre se réduit à $+(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$ et $-b\sin^2\frac{A}{2}$: la racine négative est donc comprise entre -1 et 0.

La racine positive est plus grande que 1, car pour $U = 1$ le premier membre, encore négatif, se réduit à $-(b-c)\left(1+\sin^2\frac{A}{2}\right)$.

Pour découvrir une limite supérieure et rationnelle de la racine positive de (3), savoir : $U = \dfrac{b-c+\sqrt{(b-c)^2+4bc\sin^4\frac{A}{2}}}{2c\sin^2\frac{A}{2}}$ observons que :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

l'expression soumise au radical peut donc s'écrire :

$$a^2 - 4bc\sin^2\frac{A}{2} + 4bc\sin^4\frac{A}{2} = a^2 - 4bc\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = a^2 - bc\sin^2 A$$

et comme $a = 2R\sin A$, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, le radical devient : $\sin A\sqrt{4R^2 - bc}$, d'où

$$U = \frac{b-c+\sin A\sqrt{4R^2-bc}}{2c\sin^2\frac{A}{2}} = \frac{b-c+a\sqrt{1-\sin B\sin C}}{2c\sin^2\frac{A}{2}}$$

U est donc moindre que $\dfrac{b-c+a}{2c\sin^2\frac{A}{2}}$. Or, $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ et $b - c + a = 2(p-c)$, d'où

$$U < \frac{b}{p-b} > 1.$$

On reconnaît aisément que cette limite de U est plus grande que 1, ou que

$$b > p - b \quad \text{ou} \quad 2b > p \quad 4b > 2p \quad 3b > a + c$$

cette dernière inégalité est exacte, puisque en remplaçant a par sa plus grande valeur $b + c$, on a encore :

$$3b > b + 2c \quad \text{ou} \quad b > c \text{ suivant l'hypothèse admise.}$$

Substituons d'ailleurs à U l'expression $\frac{b}{p-b}$, on trouvera, en réduisant :

$$b - \frac{(p-b)(p-c)}{c} = \frac{p(p-a)}{c}$$

valeur essentiellement positive; ainsi la racine positive est comprise entre 1 et $\frac{b}{p-b}$; elle est encore comprise entre $\sqrt{\frac{b}{c}}$ et $\frac{b}{p-b}$.

Actuellement, posons dans (1) ou (2) $x = Uy$ et $y = \frac{x}{U}$ on obtient les

formules :

(4) $$y = \frac{c\left(1 + U \sin^2\frac{A}{2}\right)}{1 + U} = \frac{b(U - 1)}{U^2 - \frac{b}{c}}$$

(5) $$x = \frac{cU\left(1 + U \sin^2\frac{A}{1}\right)}{1 + U} = \frac{b\left(U + \sin^2\frac{A}{2}\right)}{U + 1} = \frac{bU(U - 1)}{U^2 - \frac{b}{c}}$$

dont les dernières résultent de l'élimination de $\sin^2\frac{A}{2}$ au moyen de (3).

On voit que les deux valeurs de y correspondantes à celles de U sont toutes deux positives, l'une inférieure, l'autre supérieure à c, et que celles de x sont de signes contraires, la positive étant moindre que b.

Dans le cas actuel de l'ellipse circonscrite, les foyers doivent être situés sur les côtés eux-mêmes : on prendra donc concurremment la valeur positive de U, la positive de x et la plus petite des deux valeurs de y.

Expression des axes de l'ellipse. On a, pour le grand axe

$$\text{grand axe} = x + y = c\left(1 + U \sin^2\frac{A}{2}\right)$$

et pour le carré du petit axe

$$(x + y)^2 - \overline{FF'}^2 = (x + y)^2 - x^2 - y^2 + 2xy \cos A = 4xy \cos^2\frac{A}{2}$$

$$= \frac{4c^2U\left(1 + U \sin^2\frac{A}{2}\right)^2 \cos^2\frac{A}{2}}{(1 + U)^2}$$

d'où l'on déduit, pour le paramètre P, ou ordonnée du foyer :

(6) $$P = \frac{xy \cos^2\frac{A}{2}}{\frac{1}{2}(x + y)} = \frac{2cU\left(1 + U \sin^2\frac{A}{2}\right) \cos^2\frac{A}{2}}{(1 + U)^2}.$$

Ces formules permettent de vérifier cette propriété de toute corde de l'ellipse passant par un foyer, savoir :

$$\frac{1}{AF'} + \frac{1}{BF'} = \frac{2}{P} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{c - y} = \frac{c}{y(c - y)} = \frac{2}{P}$$

d'où

$$cP = 2y(c - y)$$

et de même

$$bP = 2x(b - x)$$

en utilisant cette propriété et l'expression (6) de P, on voit que les équations du problème proposé s'écrivent de suite :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{b - x} = \frac{x + y}{xy \cos^2\frac{A}{2}} \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{c - y} = \frac{x + y}{xy \cos^2\frac{A}{2}}.$$

2° Hyperbole

Dans ce cas, l'un des foyers F′ doit être sur le côté AB, et l'autre F, sur le prolongement du côté AC, ou *vice versa*, et l'on aura en tirant CF′ et BF

$$CF' - CF = BF - BF' = AF - AF' = x - y = \text{axe transversale.}$$

Il en résultera par des calculs analogues à ceux de l'ellipse

(7) $$x(x-y) = b\left(x - y\cos^2\frac{A}{2}\right)$$

(8) $$y(x-y) = c\left(x\cos^2\frac{A}{2} - y\right)$$

d'où par division membre à membre et en posant $x = Uy$

(9) $$cU^2\cos^2\frac{A}{2} - (b+c)U + b\cos^2\frac{A}{2} = 0.$$

La même équation (9) sert pour résoudre les deux cas spécifiés ci-dessus. On voit que les racines sont réelles et positives, comprises entre 0 et 1 pour la plus petite et entre 1 et $\dfrac{b+c}{c\cos^2\frac{A}{2}}$ pour la plus grande. En effet, pour ces trois valeurs successives de U, le premier membre de (9) devient :

$$+ b\cos^2\frac{A}{2}, \quad -(b+c)\sin^2\frac{A}{2}, \quad + b\cos^2\frac{A}{2}.$$

Les inconnues x et y ont pour expression :

$$y = \frac{c\left(U\cos^2\frac{A}{2} - 1\right)}{U-1}$$

$$x = \frac{cU\left(U\cos^2\frac{A}{2} - 1\right)}{U-1} = \frac{b\left(U - \cos^2\frac{A}{2}\right)}{U-1}.$$

Pour $U > 1$ on a $x > b$ et $y > c$, ce qui est conforme à la figure.

Pour $U < 1$ on a $x < b$ et $y > c$, ce qui convient au second cas où la position intérieure et extérieure des foyers est intervertie.

On trouvera pour paramètre :

$$P = \frac{2xy\sin^2\frac{A}{2}}{x-y} = \frac{2cU\left(U\cos^2\frac{A}{2} - 1\right)\sin^2\frac{A}{2}}{(U-1)^2}$$

et l'on pourra vérifier la propriété

$$\frac{1}{CF} - \frac{1}{AF} = \frac{2}{P} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x} = \frac{2}{P}$$

et aussi

$$\frac{1}{AF'} + \frac{1}{BF'} = \frac{2}{P} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{c-y} = \frac{2}{P}\ (*)$$

H. Lecocq.

Les côtés d'un triangle ont pour mesures respectives trois nombres entiers en progression arithmétique. Si l'on ajoute 50 à la mesure de chaque côté, le rayon du cercle inscrit augmente de 17, et, si l'on ajoute 60 à chaque côté, le même rayon augmente de 20. Calculer les côtés de ce triangle.

(*) Sous la condition que les foyers soient situés sur les côtés d'un triangle, il y a donc trois ellipses et six hyperboles circonscrites.

On a

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Soit m la raison et b le terme moyen. On aura

$$a = b - m, \quad c = b + m, \quad p = \frac{3b}{2},$$

$$p - a = \frac{b}{2} + m, \quad p - b = \frac{b}{2}, \quad p - c = \frac{b}{2} - m.$$

Par suite, on a :

$$(1) \qquad r = \sqrt{\frac{b^2 - 4m^2}{12}}.$$

Si b augmente de 50, m ne change pas, et r augmente de 17. D'où :

$$(2) \qquad r + 17 = \sqrt{\frac{(b+50)^2 - 4m^2}{12}}.$$

On a de même :

$$(3) \qquad r + 20 = \sqrt{\frac{(b+60)^2 - 4m^2}{12}}.$$

Elevant ces équations au carré et les retranchant deux à deux, on trouve :

$$(4) \qquad 34r + 289 = \frac{2\,500 + 100b}{12}$$

$$(5) \qquad 40r + 400 = \frac{3\,600 + 120b}{12}$$

ou encore :

$$(6) \qquad 25b - 102r = 242$$

$$(7) \qquad b - 4r = 10$$

équations qui donnent $b = 26$, $r = 4$.

L'équation (1) donne :

$$12r^2 = b^2 - 4m^2,$$

ou

$$m^2 = \frac{b^2 - 12r^2}{4},$$

et

$$m = \frac{\sqrt{b^2 - 12r^2}}{2},$$

ou, après substitution, $m = 11$.

Les autres côtés sont :

$$a = b - m = 26 - 11 = 15$$

$$c = b + m = 26 + 11 = 37.$$

Un quadrilatère circonscrit à une circonférence de rayon donné a deux angles opposés droits. On connaît sa surface, et on demande les longueurs de ses côtés et ses angles. Discuter le problème.

Soit ABCD ce quadrilatère. On pose :

$$AB = x, \quad BC = y, \quad CD = z, \quad DA = u.$$

On a, d'après un théorème connu :

(1) $$x + z = y + u.$$

D'autre part :

$$\frac{1}{2}(x + y + z + u)\,\mathrm{R} = \mathrm{S},$$

ou

(2) $$x + y + z + u = \frac{2\mathrm{S}}{\mathrm{R}}.$$

Les triangles ADB et CDB étant rectangles, et ayant l'hypoténuse commune, on a :

$$x^2 + u^2 = y^2 + z^2,$$

ou

$$x^2 - z^2 = y^2 - u^2,$$

ou encore

$$(x + z)(x - z) = (y + u)(y - u)$$

or, à cause de (1) :

(3) $$x - z = y - u$$

Combinant (1) et (3), on a :

$$x = y \quad \text{et} \quad z = u.$$

Cela posé, l'équation (2) donne :

(4) $$x + z = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}$$

et la surface du quadrilatère peut s'écrire :

(5) $$xu = \mathrm{S} \quad \text{ou} \quad xz = \mathrm{S}.$$

Les équations (4) et (5) donnent :

(6) $$\alpha^2 - \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}\alpha + \mathrm{S} = 0.$$

D'où

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{\mathrm{S} \pm \sqrt{\mathrm{S}^2 - 4\mathrm{R}^2\mathrm{S}}}{2\mathrm{R}}.$$

La condition de réalité des racines est

$$\mathrm{S} > 4\mathrm{R}^2.$$

Pour calculer l'angle B et un supplément D, je joins AC. Les deux triangles ABC et ADC donnent :

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \mathrm{B} = z^2 + u^2 + 2zu \cos \mathrm{B},$$

ou, comme

$$y = x \quad \text{et} \quad u = z,$$

$$2x^2 - 2x^2 \cos \mathrm{B} = 2z^2 + 2z^2 \cos \mathrm{B}.$$

D'où

$$\cos \mathrm{B} = \frac{x^2 - z^2}{x^2 + z^2}.$$

Ou, en remplaçant x et z par leurs valeurs,

$$\cos \mathrm{B} = \frac{\sqrt{\mathrm{S}^2 - 4\mathrm{R}^2\mathrm{S}}}{\mathrm{S} - 2\mathrm{R}^2}.$$

D'où l'angle B, et, par suite, l'angle D son supplément.

Calculer l'angle A *d'un triangle, connaissant les côtés* b *et* c, *et sachant que la surface est égale à* m *fois celle du cercle decrit sur le troisième côté comme diamètre. Entre quelles limites peut varier le nombre positif* m ?

On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$S = \frac{m\pi a^2}{4} \qquad \text{et} \qquad S = \frac{1}{2}\, bc \sin A$$

D'où

$$a^2 = \frac{4S}{\pi m} = 2bc\,\frac{\sin A}{\pi m}.$$

Par suite :

$$\frac{2bc \sin A}{\pi m} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

ou

$$2bc \sin A = \pi m(b^2 + c^2) - 2bc\pi m \cos A.$$

ou, en exprimant les sinus et cosinus en fonction de la tangente

$$2bc \operatorname{tg} A = \pi m(b^2 + c^2)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A} - 2bc\pi m.$$

ou

$$2bc \operatorname{tg} A + 2\pi mbc = \pi m(b^2 + c^2)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}.$$

On élève les deux membres au carré et on a

$$4b^2c^2 \operatorname{tg}^2 A + 8b^2c^2\pi m \operatorname{tg} A + 4\pi^2m^2b^2c^2 = \pi^2m^2(b^2 + c^2)^2(1 + \operatorname{tg}^2 A).$$

ou

$$\left[4b^2c^2 - \pi^2m^2(b^2 + c^2)^2\right]\operatorname{tg}^2 A + 8b^2c^2\pi m \operatorname{tg} A - \pi^2m^2(b^2 - c^2)^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$16b^4c^4\pi^2m^2 + \pi^2m^2(b^2 - c^2)^2\left[4b^2c^2 - \pi^2m^2(b^2 + c^2)^2\right] > 0.$$

ou

$$m^2 < \frac{4b^2c^2(b^2 + c^2)^2}{\pi^2(b^2 + c^2)^2(b^2 - c^2)^2}.$$

ou enfin

$$m^2 < \frac{\pi^2(b^2 - c^2)^2}{4b^2c^2}.$$

et

$$m < \frac{2bc}{\pi(b^2 - c^2)}.$$

Soit O *le centre d'un cercle de rayon* R. *Par un point* P *pris à l'intérieur du cercle à la distance* a *du centre, on mène la corde* AC *faisant l'angle* α *avec* PO *et la corde* BD *perpendiculaire à* AC.

Calculer en fonction des quantités Ra *et* α :

1° *Les longueurs* PA, PB, PC, PD;

2° *La surface du quadrilatère* ABCD ;

3° *Etudier la variation de cette surface en supposant que* a *et* R *sont constants et que* α *varie.*

On mène OI perpendiculaire à la corde AC.

On a :

$$PA = AI + IP = CI + IP = PC + 2PI.$$

ou

$$PA - PC = 2PI,$$

et, dans le triangle rectangle OIP,

$$PI = a \cos \alpha.$$

D'où

(1) $$PA - PC = 2a \cos \alpha$$

La propriété connue des sécantes dans le cercle donne

$$PA - PC = PM.PN = (R - a)(R + a)$$

ou

(2) $$PA.PC = R^2 - a^2.$$

PA et PC sont les racines de l'équation :

(3) $$z^2 - 2a \cos \alpha z - (R^2 - a^2) = 0.$$

Les racines sont :

$$\left.\begin{array}{l} + PA \\ - PC \end{array}\right\} = a \cos \alpha \pm \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha}.$$

D'où

(4) $$PA = \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha} + a \cos \alpha,$$

(5) $$PC = \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha} - a \cos \alpha.$$

Pour avoir PB et PD, il faut remplacer dans PA et PC l'angle α par

$$\alpha + \frac{\pi}{2}.$$

On a :

(6) $$PB = \sqrt{R^2 - a^2 \cos^2 \alpha} - a \sin \alpha,$$

$$PC = \sqrt{R^2 - a^2 \cos^2 \alpha} + a \sin \alpha.$$

La surface du quadrilatère ABCD est égale à la moitié du produit des diagonales

(8) $$S = \frac{1}{2} AC \times BD = 2\sqrt{(R^2 - a^2 \sin^2 a)(R^2 - a^2 \cos^2 \alpha)}.$$

On déduit de là :

$$S^2 = 4(R^2 - a^2 \sin^2 \alpha)(R^2 - a^2 \cos^2 \alpha).$$

Les deux facteurs variables ayant une somme constante, le maximum de leur produit aura lieu quand ils seront égaux, c'est-à-dire quand $\sin \alpha = \cos \alpha$. D'où $a = 45$. Et la valeur maxima de S sera $(2R^2 - a^2)$.

Entre les côtés d'un angle droit xoy, *on mène deux droites antiparallèles de longueurs données*, $AB = a$, $A'B' = a'$. *On forme ainsi un quadrilatère inscriptible* ABB'A'.

1° *Démontrer la relation* $4R^2 = a^2 + a'^2$, R *étant le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère.*

2° *Déterminer la portion du quadrilatère, connaissant de plus la distance* $OC = b$ *du point* O *au centre du cercle.*

Les droites AB et A'B' étant antiparallèles, les deux triangles OAB, OA'B sont semblables quoique non semblablement placés, et l'on a :

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}.$$

D'où

$$OA \times OA' = OB \times OB'.$$

Les quatre points AA'BB' sont donc sur une circonférence.

Dans les triangles rectangles AOB, A'OB', on a

$$a^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

$$a'^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2 .$$

D'où

$$a^2 + a'^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2$$

$$= (OA + OA')^2 + (OB + OB')^2 \; 4OA.OA'.$$

Mais, si l'on mène les perpendiculaires OI et OM aux cordes AA' et BB', on a

$$OA + OA' = 2OI$$

$$OB + OB' = 2OM.$$

Par suite

$$(OA + OA')^2 = 4\overline{OI}^2$$

$$(OB + OB')^2 = 4\overline{OM}^2 .$$

D'autre part, si l'on imagine menée la tangente t du point O à la circonférence, on a

$$OA.OA' = t^2 = b^2 - R^2.$$

Par suite

$$a^2 + a'^2 = 4(\overline{OI}^2 = \overline{OM}^2) - 4b^2 + 4R^2;$$

or

$$\overline{OI}^2 + \overline{OM}^2 = b^2.$$

Donc. enfin

$$a^2 + a'^2 = 4R^2.$$

TROISIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Problèmes de géométrie élémentaire, groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution, par Yvan Alexandroff, professeur de mathématiques au lycée de Tambow (Russie), traduit du russe, sur la sixième édition, par D. Aitoff. (Librairie scientifique, A. Hermann, 8, rue de la Sorbonne).

Cet ouvrage, très intéressant, a ceci de particulier qu'il classe les problèmes d'après les méthodes à employer pour leur résolution.

M. Alexandroff s'attache surtout aux méthodes suivantes : lieux géométriques, similitude, constructions inverses, symétrie, translation, rotation, inversion, application de l'algèbre à la géométrie. En tête de chaque chapitre est un exposé de la méthode à employer, suivi d'un nombre considérable de problèmes types, avec une solution complète pour chacun d'eux.

Puis, viennent les exercices pouvant être facilement résolus, si l'on s'est bien assimilé la marche suivie dans les problèmes résolus.

Cette classification offre les plus grands avantages et donne les meilleurs résultats.

Le livre de M. Alexandroff comble une véritable lacune et nous ne doutons pas qu'il ait le même succès en France qu'en Russie, où il a atteint en peu de temps sa sixième édition.

Notions complémentaires sur les courbes usuelles, par P. Barbarin, professeur de mathématiques élémentaires au lycée de Bordeaux (Librairie Nony et Cie, 33, boulevard Saint-Germain).

Cet opuscule a été rédigé tout spécialement pour les élèves de la classe supérieure de Mathématiques élémentaires.

Peu de traités de ce genre présentent la même clarté et le même intérêt. Les questions y sont traitées par des méthodes toujours simples, et les candidats ne pourront que tirer le plus grand profit de la lecture de cette brochure.

Sur les transformées des radicaux doubles réels ou imaginaires, par Léon Moreau, docteur en sciences physiques et mathématiques (Bruxelles, Charles Rozez, 81, rue de la Madeleine. — Paris, Giard et Brière, éditeurs, 16, rue Soufflot).

Cette brochure commence par un exposé très net de la théorie des nombres complexes.

Les divers cas de transformation des radicaux y sont ensuite traités d'une façon très ingénieuse, en partie nouvelle, et où notamment se trouve établie clairement la discussion relative à la fixation des signes.

Ce petit ouvrage se recommande par lui-même à tous ceux qu'intéressent les mathématiques, professeurs et candidats.

Géométrie cotée, par Lucien Ibach, directeur de l'Ecole Malesherbes et G. Mariaud, professeur à Sainte-Barbe.

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge du livre de *Géométrie cotée* de MM. Ibach et Mariaud. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que toutes les questions y sont traitées de la façon la plus complète. Pour chaque question, les auteurs ne se contentent pas d'une solution : presque toutes comportent plusieurs solutions, qui y sont exposées et développées. Dans chaque cas particulier, l'élève pourra choisir la plus rapide et la plus élégante et s'habituer à faire ainsi sans difficulté et dans le temps voulu les épures comprises dans les programmes des Écoles.

Le traité est divisé en deux parties : le *texte* et les *planches*. Cette dernière partie comprend 235 planches admirablement gravées et qui ne peuvent que faciliter le travail du candidat. Rien n'a été négligé dans ce but.

Comme le dit dans sa préface M. Klein, directeur de l'Institut commer-

cial, qui a bien voulu présenter ce livre aux lecteurs : « Ce traité, bien « étudié, bien conçu dans l'esprit des programmes, contient tout ce qu'un « candidat sérieux doit posséder ; il rendra des services signalés aux jeunes « gens... et il se distingue très nettement et très avantageusement de tous « ceux qui ont été écrits avant lui. »

Opinions et Curiosités touchant la Mathématique, d'après les ouvrages français des XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, par Georges Maupin, licencié ès sciences mathématiques et physiques. 1 vol. in-8° carré de 200 pages, avec figures, cartonné à l'anglaise. Prix : 5 francs (Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine, Paris).

Quelles opinions avaient de l'utilité des mathématiques dans les siècles précédents non seulement les savants, mais surtout les faiseurs de livres et même les ignorants ? Quels avantages pensait-on en retirer pour l'éducation ; quelle liaison singulière voulait-on établir entre la doctrine mathématique et la religion ? Voilà ce qui est traité dans ce volume. En donnant des extraits curieux et piquants des auteurs qu'il cite, M. Maupin ne s'est permis d'y ajouter que de brefs commentaires et de courtes notes biographiques, ne voulant rien ôter de leur caractère aux textes mentionnés. Ajoutons que ce n'est pas là un ouvrage savant et que, dans ses parties les plus saillantes, on s'est efforcé de le rendre intelligible à tous ceux qui ont en mathématiques des connaissances moyennes. Ce livre a, par ailleurs, un côté documentaire qui séduira les personnes qu'intéresse l'évolution de l'esprit mathématique à travers les graves querelles d'écoles et les discussions brûlantes des dogmatistes. — Les mathématiciens trouveront un vif intérêt à cette excursion rétrospective dans le domaine de la géométrie, et les curieux, que n'effrayent pas les soutenances imprévues, prendront plaisir à l'intervention des mathématiques dans le dogme de la Présence réelle. — D'autre part, le volume de M. Maupin, en tout décidément instructif, nous donne, en manière d'actualité, des aperçus originaux sur ce que pensaient de l'utilité du latin dans l'enseignement les maîtres d'autrefois. — Rien des idées que nous émettons aujourd'hui sur ce sujet sont, à la vérité, celles d'hier et nous devons au livre de M. Maupin la satisfaction de l'apprendre.

Le Directeur-gérant,
Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE St-CYR

459. Mathématiques (*Concours de* 1899). — I. Dans un triangle BAC, on donne BC $= a$, l'angle A, et, entre B et C, un point I (BI $= d$).

1° Le point I étant le point de contact du cercle inscrit au triangle avec le côté BC, calculer le rayon de ce cercle inscrit ;

2° Le point I étant le point de contact avec BC d'un cercle ex-inscrit, calculer de même le rayon de ce cercle exinscrit ;

3° Construire géométriquement le triangle dans ces deux cas et montrer que les triangles obtenus sont égaux.

II. On donne dans l'espace un cercle O et deux droites AX et BY rencontrant la circonférence O en deux points A et B diamétralement opposés et dont l'une AX est perpendiculaire au plan du cercle. Par un point quelconque M de la circonférence, on mène droite Mz rencontrant à la fois AX et BY. Démontrer :

1° Que les deux plans MAX et MBY sont rectangulaires ;

2° Que, si l'on coupe ces trois droites par un plan perpendiculaire soit à AX, soit à BY, le triangle, qui a pour sommets les trois points de rencontre, est rectangle.

460. Epure (*Concours de* 1899). — Tracer une droite parallèle au bord inférieur de la feuille à 10 centimètres de ce bord ; sur cette droite marquer un point S à 2 centimètres du bord de droite et prendre SA égale à 20 centimètres. Le point S est la projection horizontale d'un point S de cote 20 centimètres, et la droite SA est celle d'une droite SA de l'espace.

On mène par SA les deux plans de pente $\frac{\sqrt{3}}{1}$ et par S le plan perpendiculaire au plan SSA, de pente $\frac{2}{1}$, et coupant OA entre S et A. Ces trois plans et le plan horizontal déterminent un tétraèdre SABC.

Un cône, dont la directrice est une circonférence située dans le plan horizontal, de centre A et d'un diamètre égal à 11 centi-

mètres, a pour sommet un point T, de cote 10 centimètres et se projetant horizontalement en S.

Représenter le corps solide opaque commun à ce cône et au tétraèdre SABC.

Construire les tangentes aux projections horizontales des courbes d'intersection de ces deux solides : 1° aux points de ces intersections situés sur SA ; 2° aux points où ces tangentes aux projections sont perpendiculaires à SA ; 3° aux points où elles sont parallèles à AB et à AC.

461. Calcul trigonométrique (*Concours de* 1899). — Calculer les angles et la surface d'un triangle dont on donne les trois côtés :

$$a = 3\,256 \text{ mètres},$$
$$b = 3\,402 \text{ mètres},$$
$$c = 3\,301 \text{ mètres}.$$

(Les candidats doivent se servir de tables à 5 décimales).

462. Questions posées à l'oral. — Etudier la variation de la fonction :

$$y = \frac{x^3 - 3x + 2}{(x + 1)^2}.$$

— Construire une ellipse, connaissant un foyer, deux tangentes et le point de contact d'une des tangentes.

— Pour quelles valeurs de a la fonction $y = \frac{x - a}{x^2 - 3x + 2}$ a-t-elle un maximum et un minimum ?

— Rendre logarithmique l'expression $\frac{2 \sin a + \sin 2a}{2 \sin a - \sin 2a}$.

— On donne $\cos x = \frac{\cos a}{\sin b}$. Calculer $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

— Résoudre le système d'équations :

$$x + y + xy = 116$$
$$x^2 + y^2 - (x + y) = 188.$$

— Construire une parabole, connaissant son foyer, une tangente et le point de contact de cette tangente.

On donne un trapèze et l'on prend sur l'un des côtés non parallèles un point divisant ce côté dans un rapport donné $\frac{p}{q}$: mesurer la longueur de la parallèle aux bases menée par ce point.

— Inscrire dans un triangle un rectangle dont on donne la longueur de la diagonale.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$.

— Résoudre le système d'équations

$$2x - 3y + z = 1$$
$$3x + y - 4z = 5$$
$$5x - 3y - 2z = 3.$$

— Résoudre l'équation

$$3 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x = 5$$

et l'équation

$$\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 1.$$

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

463. Mathématiques (*Concours de* 1899). — 1° Déterminer toutes les valeurs de l'arc x qui vérifient l'équation :

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x + \sqrt{2} = 0 ;$$

2° Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant le rayon r du cercle inscrit et la longueur d de la bissectrice intérieure de l'angle droit.

464. Physique et Chimie (*Concours de* 1899). — 1° Exposer le principe et donner une description sommaire d'une machine électrique à courant continu ;

2° On prélève un demi-mètre cube dans de l'air dont la température est 270°,3, l'état hygrométrique 1/3, la pression 75 centimètres de mercure. On fait passer cet air sur des substances desséchantes et on l'introduit dans un corps de pompe cylindrique entouré de glace fondante, dont la section est de 5 décimètres carrés. On demande quelle est, évaluée en kilogrammes, la force qu'il faut faire agir sur le piston, supposé de poids négligeable, pour que l'air occupe dans le corps de pompe, une hauteur égale à 4 décimètres, la pression atmosphérique, qui est restée invariable, continuant d'ailleurs à agir sur le piston.

La densité du mercure est 13,56 ; la force élastique maxima de la vapeur d'eau à 27°,2 est équilibrée par 27 millimètres de mercure ; le coefficient de dilatation de l'air est $\frac{1}{273}$;

3° Ammoniaque. Origine des composés ammoniacaux.

465. Epure (*Concours de* 1899). — La ligne de terre est le petit axe de la feuille. Un cube dont l'arête est de 8 centimètres,

a l'un de ses sommets A dans le plan horizontal, sur le grand axe de la feuille, à 10 centimètres en avant du plan vertical ; la diagonale de ce cube, issue de A, est verticale et dirigée vers le haut ; l'une de ses arêtes issues de A est située dans un plan de profil et dirigée en arrière.

Représenter ce cube par ses deux projections, ainsi que sa section par le plan qui passe par son centre et la ligne de terre ; donner aussi le rabattement de cette section sur le plan horizontal.

On fera la distinction des parties vues et cachées comme d'habitude.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

466. Mathématiques (*Obligatoire*). — Etant donné un cercle de rayon R et deux tangentes PA, PB faisant entre elles un angle α, calculer le rayon x du cercle D tangent aux deux droites PA et PB et tangent extérieurement au cercle donné C. Cas particulier où $\alpha = 60°$.

(*Au choix*). — *a*) Sensibilité et justesse d'une balance.

b) Théorème de Varignon.

c) Démontrer les théorèmes qui conduisent au volume de la sphère.

467. Physique (*Obligatoire*). — Un tube vertical, fermé à sa partie supérieure, est renversé sur une cuve à mercure large et profonde. Sa longueur est de 1 mètre ; sa section est de 1 centimètre carré. Il contient à sa partie supérieure de l'air dont la pression est de 20 centimètres de mercure ; la pression extérieure est de 730 millimètres ; la température de 10°. On enfonce le tube dans la cuvette jusqu'à ce que le niveau du mercure soit le même à l'intérieur et à l'extérieur. Quelle sera la longueur occupée par l'air dans le tube ? Quel est le poids de cet air ?

(*Au choix*). — *a*) Solénoïdes.

b) Courants électriques.

c) Induction électrique.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

468. Mathématiques (*Obligatoire*). — Étant donné le secteur circulaire droit BOA et la tangente en A, mener une tangente DE telle que le trapèze OAED soit équivalent à un carré donné.

(*Au choix*). — *a*) Centre de gravité d'un trapèze.

b) Réduction à deux d'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps.

c) Balance romaine.

469. Physique (*Obligatoire*). — La chaleur dégagée par la combustion de 3 grammes de charbon a élevé à 3°,12 la température d'un calorimètre dont le poids évalué en eau est de 7 kilogrammes. Quel poids du même charbon faudrait-il brûler pour fondre 100 kilogrammes de glace à 0°, chauffer l'eau de fusion à 12° et la volatiliser à la même température. La chaleur latente de fusion de la glace est de 80 calories; la chaleur latente de vaporisation de l'eau à t° est 606,5 — 0,695t calories.

(*Au choix*). — *a*) Machine d'Atwood.

b) Pendule. Applications.

c) Poids spécifique des solides.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

470. Arithmétique et Algèbre (*Concours de* 1899).— Trois ouvriers sont employés à faire un travail. Le deuxième pour faire le travail seul, mettrait moitié plus de temps que le premier; le troisième, pour faire le travail seul, mettrait un tiers de plus que le troisième.

Sachant qu'à eux trois, travaillant ensemble, ils ont mis soixante-douze heures pour faire la besogne, on demande :

1° De calculer le temps que chacun mettrait pour faire seul le travail ;

2° De partager le prix du travail, qui est de 91 francs, entre les trois ouvriers, proportionnellement à la besogne faite par chacun d'eux.

471. Géométrie (*Concours de* 1899). — Dans un tétraèdre SABC, la base ABC et la face SBC sont des triangles équilatéraux

à côté connu a, comprenant entre leurs plans un dièdre égal à 60°. Trouver en fonction de (a) : 1° la surface totale du tétraèdre ; 2° son volume.

472. Physique et Chimie (*Concours de* 1899). — I. *Physique*. — Détermination de la chaleur spécifique des corps solides et liquides par la méthode des mélanges.

II. *Chimie*. — Chlorures de sodium et de potassium. Acide chlorhydrique.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

473. Arithmétique. — On prend trois lingots d'argent qui ont respectivement pour titres : 0,95 ; 0,80 et 0,50.

Le poids du premier lingot et le poids du second sont proportionnels à 3 et à 4.

Le poids du troisième lingot est double du poids du second lingot.

Les trois lingots fondus pèsent ensemble 3 800 grammes.

On demande :

1° Quel poids de cuivre ou quel poids d'argent pur il faut ajouter au lingot total pour fabriquer un alliage pouvant servir à frapper des pièces de 1 franc en argent ?

2° Quel sera le nombre de pièces de 1 franc frappées ?

474. Géométrie. — Mener une parallèle DE à la base BC d'un triangle ABC, de façon que l'air du trapèze DECB qui en résulte soit moyenne proportionnelle entre l'aire du triangle donné ABC et celle du triangle ADE par cette parallèle.

475. Algèbre. — Transformer l'expression

$$\sqrt{2x^2 + x + 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}$$

en une autre qui ne contienne que deux radicaux simples.

476. Calcul logarithmique. — Calculer :

$$x = \left[\frac{4\sqrt[3]{\pi} \times 2{,}314 \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{4{,}628}}}{5\sqrt[5]{3{,}4865}}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

Questions diverses

477. — Deux droites parallèles et deux points étant donnés, tracer par ces points deux droites qui se coupent sur l'une des parallèles et forment avec l'autre un triangle de surface donnée.

478. — Transformer un triangle rectangle en un triangle isocèle qui lui soit équivalent et qui ait avec lui un angle commun. Combien ce problème a-t-il de solutions ? Montrer comment, en s'appuyant sur ce théorème, on peut transformer un polygone régulier en un autre qui lui soit équivalent et ait deux fois plus de côtés.

479. — Si, pour construire le quadrilatère ABCD, on ne donne que les trois côtés AB, BC, CD et la diagonale AC, le quadrilatère est indéterminé. 1° Quel est le lieu du sommet D ? 2° Quel est le lieu du milieu de la diagonale BD ? 3° Quel est le lieu du milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales ?

480. — Démontrer que si, dans un triangle, deux bissectrices sont égales, le triangle est isocèle.

481. — Résoudre un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et la bissectrice relative à ce côté. Construction géométrique de ce triangle.

482. — Démontrer que, si l'on fait tourner successivement autour de deux de ses côtés non parallèles un parallélogramme donné, les volumes engendrés sont en raison inverse de ces côtés.

483. — Construire un triangle connaissant le centre du cercle inscrit et les pieds d'une médiane et d'une hauteur issues d'un même sommet.

484. *Géométrie descriptive.* — Étant donné dans le plan horizontal un triangle quelconque ABC, trouver les projections du tétraèdre SABC trirectangle en S. Déterminer les faces et les angles dièdres de ce tétraèdre. Déterminer le centre de la sphère circonscrite et le centre de la sphère inscrite.

Calculer ensuite le volume du tétraèdre et les rayons de la sphère inscrite et circonscrite en fonction des côtés AB, AC, BC.

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses avec solutions

Résoudre le système de deux équations :

$$ax + by = ap + bq.$$
$$x^2 + y^2 + xy = p^2 + q^2 + pq.$$

Les équations proposées peuvent être écrites :

(1) $$a(x-p) + b(y-q) = 0,$$

(2) $$(x-p)(x+p) + (y-q)(y+q) + \frac{(x-p)(y+q)}{2} + \frac{(x+p)(y-q)}{2} = 0.$$

Posons :

(3) $$x - p = x', \quad y - q = y'.$$

Les équations deviennent :

(4) $$\begin{cases} ax' + by' = 0, \\ x'(x' + 2p) + y'(y' + 2q) + \dfrac{x'(y' + 2q)}{2} + y'\dfrac{(x' + 2p)}{2} = 0, \end{cases}$$

ou, en développant cette seconde équation :

(5) $$x'^2 + y'^2 + x'y' + (2p + q)x' + (2q + p)y' = 0.$$

Soit $b = 0$.

Alors de (4), on tire :

$$q' = -\frac{a}{b}x'.$$

Et, en portant dans (5),

$$(a^2 + b^2 - ab)x'^2 - b\big[a(2q + p) - b(2p + q)\big]x' = 0.$$

Donc, on a les solutions :

1° $$x' = 0 \quad \text{ou} \quad x = p,$$

avec

$$y' = 0 \quad \text{ou} \quad y = q.$$

2° $$x' = \frac{b\big[a(2q + p) - b(2p + q)\big]}{a^2 + b^2 - ab},$$

d'où

$$x = x' + p = \frac{-p(a^2 - b^2) + qb(2a - b)}{a^2 + b^2 - ab},$$

avec

$$y' = \frac{a\big[b(2p + q) - a(2q + p)\big]}{a^2 + b^2 - ab},$$

d'où

$$y = y' + q = \frac{-q(a^2 - b^2) + pa(2b - a)}{a^2 + b^2 - ab}.$$

Calculer la hauteur abaissée du sommet A *d'un triangle sur le côté opposé, connaissant l'angle* A *et les deux segments déterminés par la hauteur sur les côtés opposés. On donne* A, BD = m, DC = n; *et on demande de calculer* AD = x.

Soient x la hauteur, α et β les deux parties de l'angle A.

Les triangles rectangles ABD et ACD donnent :

$$m = x \operatorname{tg} \alpha, \quad n = x \operatorname{tg} \beta.$$

D'ailleurs

$$A = \alpha + \beta.$$

Donc

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

ou

$$\operatorname{tg} A = \frac{(m + n)x}{x^2 - mn},$$

d'où

$$x^2 \operatorname{tg} A - (m + n)x - mn \operatorname{tg} A = 0.$$

Pour qu'une racine de cette équation soit acceptable, il faut qu'elle soit réelle et positive. La condition de réalité $(m + n)^2 + 4mn \operatorname{tg}^2 A \geqslant 0$ est toujours satisfaite.

Le produit des racines est $-mn$; donc les racines sont de signes contraires : il y en a toujours une positive. La somme est $\frac{m+n}{\operatorname{tg} A}$.

Si $A < 90^\circ$, la racine positive est la plus grande valeur absolue.

Si $A > 90^\circ$, la racine positive est la plus petite en valeur absolue.

On a alors :

$$\text{pour } A < 0, \quad x = \frac{m + n + \sqrt{(m+n)^2 + 4mn \operatorname{tg}^2 A}}{2 \operatorname{tg} A},$$

$$\text{pour } A > 0, \quad x = \frac{m + n - \sqrt{(m+n)^2 + 4mn \operatorname{tg}^2 A}}{2 \operatorname{tg} A}.$$

Déterminer les valeurs des arcs x *et* y *qui vérifient les deux équations :*

$$\sin x + \sin y = 1, \quad \cos 2x + \cos 2y = 1 - a^2,$$

dans lesquelles a *représente un nombre donné.*

Remplaçons $\cos 2x$ et $\cos 2y$ par leur valeur en fonction de $\sin x$ et de $\sin y$.

On a :

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y.$$

L'équation $\cos 2x + \cos 2y = 1 - a^2$ devient alors :

$$(1) \qquad \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{a^2 + 1}{2}.$$

Or, de $\sin x + \sin y = 1$, on tire, en élevant au carré :

$$\sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y = 1,$$

d'où, en remplaçant $\sin^2 x + \sin^2 y$ par sa valeur tirée de l'équation (1), il vient :

$$(2) \qquad \sin x \sin y = \frac{1 - a}{4}.$$

Donc $\sin x + \sin y$ sont deux inconnues dont on connait la somme 1 et le produit $\frac{1 - a^2}{4}$; ce sont donc les racines de l'équation du second degré :

$$(3) \qquad z^2 - z + \frac{1 - a^2}{4} = 0.$$

La condition de réalité est toujours satisfaite car les termes extrêmes sont de signes contraires. Substituons (1). Le résultat de la substitution est $\frac{1 - a^2}{4}$; il est du signe de $1 - a^2$.

Comme les deux racines doivent être < 1, il faut que ce résultat soit positif. Donc, on doit avoir : $-1 < a < 1$.

Substituons (-1). Le résultat est $\frac{9 - a^2}{4}$: il est positif, si les conditions précédentes sont satisfaites, comme d'ailleurs -1 est $<$ que la

demi-somme $1/2$ des racines, -1 est plus petit que les deux racines. Donc, les racines sont acceptables. On a alors :

$$\sin x = \frac{1 + a}{2}; \quad \sin y = \frac{1 - a}{2}.$$

Calculer sans avoir recours aux tables de logarithmes les valeurs des arcs x *et* y *qui vérifient les deux équations :*

$$x + y = a$$
$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos a,$$

dans lesquelles a *est connu.*

On sait, d'après les formules de la multiplication des arcs, que l'on a

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

D'où

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2y}{2}.$$

De même

$$\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}.$$

Donc

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \frac{\cos 2x + \cos 2y}{2}$$

D'ailleurs

$$\cos 2x + \cos 2y + 2 \cos (x + y) \cos (x - y) = 2 \cos a \cos (x - y).$$

L'équation

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos a$$

peut donc s'écrire :

$$1 - \cos a \cos (x - y) = 1 - \cos a,$$

ou

$$\cos a \cos (x - y) = \cos a.$$

Supposons $\cos a$ différent de zéro, c'est-à-dire

$$a \lesseqgtr K\pi + \frac{\pi}{2}.$$

l'équation deviendra

$$\cos (x - y) = 1.$$

D'où

$$x - y = 2K\pi.$$

Les arcs x et y sont déterminés par les équations :

$$x - y = a$$
$$x - y = 2K\pi,$$

K étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

D'où, en ajoutant, puis en retranchant

$$2x = a + 2K\pi,$$
$$2y = a - 2K\pi.$$

d'où

$$x = \frac{a}{2} + K\pi,$$

$$y = \frac{a}{2} - K\pi,$$

si $\cos a = 0$, on a $a = K\pi + \frac{\pi}{2}$.

En particulier, pour $K = 0$, il vient

$$a = \frac{\pi}{2}.$$

y est le complément de x.

La seconde équation devient

$$\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

qui est une identité puisque

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^2 x.$$

Couper une sphère donnée par un plan de manière que le rapport du plus grand segment sphérique ainsi déterminé au cône qui a pour sommet le centre de la sphère et pour base la section soit égal à m.

Soit x la distance OI du centre O à la base AB du segment OI $= x$.

Le volume du segment est :

$$V = \frac{1}{6}\pi(R + x)^3 + \frac{1}{2}\pi\,\overline{AI}^2\,(R + x).$$

Le volume du cône AOB est :

$$V' = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AI}^2 \times x.$$

Or

$$\overline{AI}^2 = R^2 - x^2 = (R + x)(R - x).$$

Donc l'équation du problème est :

$$\frac{V}{V'} = m, \quad \text{ou} \quad \frac{(R + x)^3 + 3(R + x)^2 (R - x)}{2x(R + x)(R - x)},$$

et, en simplifiant :

$$(R + x)^2 + 3(R^2 - x^2) = 2mx(R - x),$$

ou encore :

$$(m - 1)x^2 - R(m - 2)x + 2R^2 = 0.$$

Pour que les racines de cette équation soient acceptables, il faut et il suffit qu'elles soient réelles, positives et inférieures à R.

La condition de réalité est $R^2(m - 1)(m - 9) > 0$.

Donc, il faut que l'on ait :

$$m \leqq 1 \quad \text{ou} \quad m \geqq 9.$$

Supposons une de ces deux conditions satisfaite. Le produit des racines est $\frac{2R^2}{m - 1}$. Ce produit est du signe de $m - 1$. Si $m < 1$, le produit des racines est négatif, les deux racines sont de signes contraires, la racine

> 0 est seule acceptable. Si $m > 9$, le produit des racines est positif ; leur somme R étant positive, les deux racines sont positives.

Il faut de plus qu'une valeur de x pour être acceptable, soit $< R$. Substituons R. Le résultat de la substitution est $2R^2 \geqq 0$; donc, R est extérieur aux racines. Si $m < 1$, une des racines est < 0 ; R est $>$ que cette racine ; donc R est $>$ que les deux racines ; la racine positive est acceptable. Si $m > 1$, R est $> \frac{1}{2}$ somme $\frac{R}{2}$ des racines. Donc, il est plus petit que les deux racines. Les deux racines sont acceptables.

Donc, si $m < 1$, une seule solution : $x = \frac{R}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{m-9}{m-1}}\right)$,

si $9 > m > 1$, pas de solution.

si $m > 9$, deux solutions : $x = \frac{R}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{m-9}{m-1}}\right)$.

Sur une circonférence O *de rayon* R *on donne deux points* A *et* B, *dont la corde* AB *sous-tend l'angle donné* a *et l'on mène les tangentes* AT, BT' *en ces deux points. On fait tourner la figure autour du diamètre quelconqre* PP' ; *montrer que les surfaces engendrées par* AB *et par* ATB *sont à celle de la zone décrite par l'arc* AB *dans deux rapports* K *et* K' *indépendants du diamètre* PP'. *Donner ces rapports et trouver la relation qui les lie.*

On projette les points B, T et A sur l'axe PP' en B', T' et A'. Soit POB $= b$ (B étant le point le plus élevé).

On a successivement :

(1) surface corde AB $= \pi(BB' + AA') \times AB$.

(2) surface ATB $=$ surface AT $+$ surface TB $= \pi(AA' + 2TT' + BB').AT$,

(3) surface zône AB $= 2\pi r \times A'B'$.

Or,

$$BB' = r \sin b,$$
$$AA' = r \sin (a + b),$$
$$TT' = OT \sin\left(b + \frac{a}{2}\right),$$

et

$$OT = r \text{ séc. } \frac{a}{2}.$$

D'où

$$TT' = r \sin\left(b + \frac{a}{2}\right) \text{ séc. } \frac{a}{2}$$
$$= \frac{r \sin\left(b + \frac{a}{2}\right)}{\cos \frac{a}{2}},$$

$$A'B' = OB' - OA' = r[\cos b - \cos (a + b)]$$

$$AT = r \text{ tg } \frac{a}{2}.$$

Et enfin :

$$\text{corde AB} = 2r \sin\frac{a}{2}.$$

Substituant ces valeurs dans (1), (2), (3), on trouve :

(4) $$\text{surface corde AB} = 2\pi r^2 [\sin b + \sin(a+b)] \sin\frac{a}{2}$$
$$= 4\pi r^2 \sin\left(b+\frac{a}{2}\right)\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2},$$

(5) $$\text{surface ATB} = \frac{2\pi r^2 \sin\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}\left(1+\cos^2\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\frac{a}{2}},$$

(6) $$\text{surface zône AB} = 2\pi r^2[\cos b - \cos(b+a)] = 4\pi r^2 \sin\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}.$$

D'où

(7) $$K = \frac{\sin\left(b+\frac{a}{2}\right)\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}}{\sin\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}} = \cos\frac{a}{2},$$

(8) $$K' = \frac{\sin\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}\left(1+\cos^2\frac{a}{2}\right)}{2\cos^2\frac{a}{2}\sin\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}} = \frac{1+\cos^2\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}.$$

Les rapports K et K' sont donc indépendants de l'angle b.

Eliminant $\cos\frac{a}{2}$ entre (7) et (8) on trouve :

(9) $$K' = \frac{1+K^2}{2K^2}.$$

On a

$$S = 4\pi r^2 \sin\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2},$$

$$S' = 2\pi r^2 \frac{\sin\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}\left(1+\cos^2\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\frac{a}{2}}.$$

Divisant membre à membre, on trouve :

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{1+\cos^2\frac{a}{2}}.$$

D'où

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{S}{2S'-S},$$

et

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{S}{2S'-S}},$$

ce qui donne l'angle a.

Pour avoir l'angle b, on écrit :

$$\sin\left(b + \frac{a}{2}\right) = \frac{S}{4\pi r^2 \sin\frac{a}{2}},$$

et, comme on connaît l'angle a, la table donnerait b, c'est-à-dire la direction de l'axe.

QUATRIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Calcul de généralisation par G. Oltramare, doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Genève Librairie scientifique A. Hermann, 8, rue de la Sorbonne).

Le calcul de généralisation faisant l'objet de l'ouvrage de M. Oltramare, a pour base la représentation des fonctions uniformes sous une forme symbolique, telle que l'on puisse effectuer sur ces fonctions les principales opérations auxquelles elles sont soumises, comme leur différentiation et leur intégration, à l'aide d'un calcul algébrique très simple à effectuer.

Après avoir établi quelques principes généraux, l'auteur s'applique à déterminer une intégrale particulière de toute équation différentielle ou aux différences et différentielles partielles linéaires à coefficients constants avec un second membre. Il traite également de l'intégration des équations simultanées, des équations aux différences mêlées et de certaines classes d'équations aux différentielles partielles avec des coefficients variables.

Les procédés dont s'occupe M. Oltramare sont pour l'analyse supérieure, ce que sont les logarithmes pour le calcul numérique : ils diminuent, dans beaucoup de cas, les difficultés de la différentiation et de l'intégration,

Nous croyons que son ouvrage devra être consulté par tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques.

La technique des rayons X, manuel opératoire de la radiographie et de la fluoroscopie à l'usage des médecins, chirurgiens et amateurs de photographie, par Alexandre Hébert, préparateur à la faculté de médecine (Carré et Naud, 3, rue Racine).

Cet ouvrage correspond à une actualité qui intéresse tout le monde. Tous les journaux scientifiques ont consacré de nombreux articles à cette magnifique découverte du Dr Rœntgen, et la presse quotidienne s'en est emparée au point de vue des faits et des applications pratiques.

M. Hébert a su donner de la technique et de l'emploi des rayons X une idée assez précise, pour permettre au lecteur non encore initié au mode opératoire, de produire chez lui ces rayons et de les appliquer sans difficulté à l'inspection des parties profondes du corps humain.

Il indique au lecteur la façon d'acheter le matériel nécessaire, de l'entre-

tenir en bon état et de s'en servir. S'il veut bien suivre le manuel opératoire, d'ailleurs très simple, que décrit ce petit livre, il aura la surprise d'obtenir, du premier coup et sans effort, des images d'un genre nouveau, dont la beauté ne le cédera en rien à celle des radiographies qui ont été publiées un peu partout.

L'Enseignement Mathématique, revue internationale paraissant tous les deux mois. *Directeurs* ; C. A. Laisant, docteur ès sciences, répétiteur à l'Ecole Polytechnique et H. Fehr, Privat-docent à l'Université de Genève, professeur au Collège et à l'Ecole professionnelle. — Editeurs : Carré et Naud, 3, rue Racine.

Cette nouvelle revue se présente sous les auspices de deux hommes qui occupent une haute situation dans le monde scientifique : M. Laisant, dont on connait les remarquables travaux scientifiques et M. Fehr, qui est un des savants les plus distingués de la Suisse.

C'est assez dire que cette revue offrira le plus grand intérêt à tous ceux qui suivent le mouvement scientifique.

Cette publication a un caractère franchement et hautement international et le comité se compose des plus éminents mathématiciens de toutes les nations. Chaque numéro contiendra, en principe : 1° des articles généraux ; 2° des études pédagogiques ; 3° une chronique et des correspondances ; 4° une partie bibliographique. La philosophie scientifique y tiendra sa place et les articles qu'elle inspirera ne manqueront pas d'offrir au lecteur un attrait tout particulier.

On ne peut qu'applaudir à la fondation de cette œuvre nouvelle, au commencement de ce xxe siècle, puisque ce siècle, comme le disent les directeurs de la revue dans leur premier article : « Soit au point de vue « de la science pure, soit à celui des applications manifestera des exigences « auxquelles personne ne doit ni ne peut se dérober ».

Géométrie cotée, par Lucien Ibach, directeur de l'Ecole Malesherbes et G. Mariaud, professeur à Sainte-Barbe.

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge du livre de *Géométrie cotée* de MM. Ibach et Mariaud. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que toutes les questions y sont traitées de la façon la plus complète. Pour chaque question, les auteurs ne se contentent pas d'une solution : presque toutes comportent plusieurs solutions, qui y sont exposées et développées. Dans chaque cas particulier, l'élève pourra choisir la plus rapide et la plus élégante et s'habituer à faire ainsi sans difficulté et dans le temps voulu les épures comprises dans les programmes des Ecoles.

Le traité est divisé en deux parties : le *texte* et les *planches*. Cette dernière partie comprend 235 planches admirablement gravées et qui ne peuvent que faciliter le travail du candidat. Rien n'a été négligé dans ce but.

Comme le dit dans sa préface M. Klein, directeur de l'Institut commer-

ciat, qui a bien voulu présenter ce livre aux lecteurs : « Ce traité, bien « étudié, bien conçu dans l'esprit des programmes, contient tout ce qu'un « candidat sérieux doit posséder ; il rendra des services signalés aux jeunes « gens... et il se distingue très nettement et très avantageusement de tous « ceux qui ont été écrits avant lui. »

Opinions et Curiosités touchant la Mathématique, d'après les ouvrages français des XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, par Georges Maupin, licencié ès sciences mathématiques et physiques. 1 vol. in-8° carré de 200 pages, avec figures, cartonné à l'anglaise. Prix : 5 francs (Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine, Paris).

Quelles opinions avaient de l'utilité des mathématiques dans les siècles précédents non seulement les savants, mais surtout les faiseurs de livres et même les ignorants ? Quels avantages pensait-on en retirer pour l'éducation ; quelle liaison singulière voulait-on établir entre la doctrine mathématique et la religion ? Voilà ce qui est traité dans ce volume. En donnant des extraits curieux et piquants des auteurs qu'il cite, M. Maupin ne s'est permis d'y ajouter que de brefs commentaires et de courtes notes biographiques, ne voulant rien ôter de leur caractère aux textes mentionnés. Ajoutons que ce n'est pas là un ouvrage savant et que, dans ses parties les plus saillantes, on s'est efforcé de le rendre intelligible à tous ceux qui ont en mathématiques des connaissances moyennes. Ce livre a, par ailleurs, un côté documentaire qui séduira les personnes qu'intéresse l'évolution de l'esprit mathématique à travers les graves querelles d'écoles et les discussions brûlantes des dogmatistes. — Les mathématiciens trouveront un vif intérêt à cette excursion rétrospective dans le domaine de la géométrie, et les curieux, que n'effrayent pas les soutenances imprévues, prendront plaisir à l'intervention des mathématiques dans le dogme de la Présence réelle. — D'autre part, le volume de M. Maupin, en tout décidément instructif, nous donne, en manière d'actualité, des aperçus originaux sur ce que pensaient de l'utilité du latin dans l'enseignement les maîtres d'autrefois. — Rien des idées que nous émettons aujourd'hui sur ce sujet sont, à la vérité, celles d'hier et nous devons au livre de M. Maupin la satisfaction de l'apprendre.

Le Directeur-gérant,
Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE St-CYR

477. Mathématiques. — I. On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy et un cercle S de rayon R, tangent à ces deux droites. On mène une tangente au cercle S rencontrant Ox et Oy en A et en B. Sur AB comme côté, on construit un carré ABCD. Déterminer la tangente AB, de telle sorte que l'aire du triangle OCD ait une valeur donnée $\frac{1}{2}a^2$. Discussion. Construction géométrique.

II. Prouver que si, dans un tétraèdre, deux couples d'arêtes opposées sont rectangulaires, les deux dernières arêtes sont aussi perpendiculaires l'une sur l'autre. De plus, dans ce même tétraèdre, les milieux des six arêtes sont sur une même sphère.

478. Epure. — Un cône de révolution a pour base sur le plan de comparaison un cercle O de 50 millimètres de rayon, tangent à la ligne de terre, et il a une hauteur de 112 millimètres. On mène :

1° Par le milieu A de la génératrice de front (celle de gauche) le plan parallèle au plan tangent au cône suivant la génératrice opposée ;

2° La normale au cône en A, qui rencontre le plan horizontal en B, les tangentes BC et BD au cercle O et enfin les plans ABC et ABD.

On demande de représenter par ses projections le solide commun au cône et au tétraèdre qui forment le plan horizontal et les trois plans précédents.

479. Calcul trigonométrique. — Calculer les éléments d'un triangle dont on connaît :

$$A = 28°32'56'',8,$$
$$b = 2\,928,$$
$$c = 4\,694.$$

480. Questions posées à l'oral. — Soient trois nombres A, B, C et Δ le plus grand commun diviseur de AB, BC

et CA. Démontrer que le plus petit commun multiple des trois nombres A, B, C est égal au quotient du produit ABC par Δ.

— Réduire en un monôme l'expression

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin (A + B + C).$$

— Résoudre l'équation

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c = 0.$$

— Construire une parabole connaissant quatre tangentes.

— Montrer que, si a est un nombre entier, $a^{n+4} - a^n$ est divisible par 10.

— Sachant que tg x est égal à 3, calculer la valeur de sin $4x$.

— Résoudre l'équation :

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = m.$$

— Trouver quatre nombres en proportion, sachant que la somme des moyens est égale à a, la somme des extrêmes à b et la somme des carrés des quatre termes à k^2.

— On donne le rayon du demi-cercle ACDB. Calculer le côté CD du trapèze ACDB dans lequel la somme des bases est égale à la somme des deux autres côtés.

— Résoudre un triangle, connaissant la somme de deux côtés, leur produit et la surface.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

481. Mathématiques. — 1° Dans un triangle, on donne le périmètre et un côté a, et l'on sait que ce côté est moyen proportionnel entre les deux autres côtés b et c. Calculer ces derniers côtés. Quel est le maximum du côté a quand on suppose le périmètre constant ?

2° On donne dans un triangle les trois angles A, B, C et le rayon r du cercle inscrit. On demande de calculer en fonction de ces données :

1° Les trois côtés a, b, c ;

2° La surface S ;

3° Le rayon R de cercle circonscrit.

482. Physique et Chimie. — 1° Détermination de la chaleur spécifique des solides ;

2° On introduit dans un endiomètre à mercure 20 centimètres cubes d'un gaz inconnu, 50 centimètres cubes d'oxygène et, pour

faciliter la réaction, une quantité convenable d'un mélange détonant obtenu par la décomposition de l'eau par la pile.

Après le passage de l'étincelle, il reste 70 centimètres cubes d'un résidu gazeux dans lequel la potasse absorbe 40 centimètres d'acide carbonique et le phosphore 10 centimètres cubes d'oxygène resté libre. Le résidu final de 20 centimètres cubes est de l'azote.

On demande d'après cette expérience :

1° De déterminer la composition et la formule du gaz mis en expérience;

2° De calculer sa densité.

On donne :

Equivalents en volume $\begin{cases} O = 1, \\ Az = 2, \\ CO^2 = 2. \end{cases}$

Densités rapportées à l'air $\begin{cases} O = 1{,}1056, \\ Az = 0{,}972, \\ CO^2 = 1{,}529. \end{cases}$

483. Epure. — On donne une droite et deux points P et Q : par la droite et ces deux points, on fait passer deux plans qui forment un dièdre dont on demande les plans bissecteurs, P et Q sont sur xy ; $Pa' = 1$; $a'b = 5$; $b\alpha = 1$; $aa' = 4$; $bb' = 4$.

Cela fait, on considère la verticale située à 8 centimètres en avant de xy et dont la trace horizontale est à égale distance de P et de Q. Les points où elle rencontre les plans bissecteurs, sont les centres de carrés de 8 centimètres de côté, ayant chacun une diagonale perpendiculaire à xy, et situés dans les plans bissecteurs ci-désignés; ces carrés servent de bases à des prismes ayant leurs arêtes perpendiculaires aux plans bissecteurs sur lesquels ils reposent. On demande l'intersection de ces prismes.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

484. Mathématiques (*Obligatoire*). — Dans un triangle ABC, on donne les longueurs des côtés AB et AC, et de la droite qui joint le point A au quart de BC à partir de B.

1° Construire géométriquement le triangle;

2° Calculer BC.

(*Au choix*). — *a*) Théorème de Varignon.

— *b*) Démontrer les théorèmes qui conduisent au volume du terme de pyramide.

— *c*) Théorie du plan incliné.

485. Physique (*Obligatoire*). — Devant un miroir concave sphérique de 2 mètres de rayon, on place une flèche lumineuse d'un décimètre de longueur perpendiculairement à l'axe principal et à 5 mètres du miroir. Où se forme l'image et quelle en est la grandeur?

On met ensuite un petit miroir plan au foyer principal du miroir sphérique, incliné de 45° sur l'axe principal et la face réfléchissante tournée vers le miroir. Quelle image formeront les rayons réfléchis par le grand miroir sphérique en tombant sur le petit miroir plan? Quelles en seront la grandeur et la situation? Où placer un écran pour la recevoir ou bien une loupe pour l'observer et pour l'agrandir?

(*Au choix*). — *a*) Action des courants sur les courants.

b) Densité des solides.

c) Coefficient de dilatation des gaz.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

485bis. Mathématiques (*Obligatoire*). — Dans un trapèze on donne les deux côtés parallèles a et b et les deux diagonales m et n. On demande de calculer les côtés non parallèles, la hauteur et la surface.

Appliquer les formules au cas où $m = n$, et calculer dans ce cas le rayon du cercle circonscrit au trapèze.

(*Au choix*). — *a*) Volume de la zone sphérique.

b) Similitude des triangles.

c) Trièdres supplémentaires.

486. Physique (*Obligatoire*). — Un objet lumineux AB est placé perpendiculairement à l'axe optique d'une lentille biconvexe L et d'un miroir convexe M, distants de la longueur d. Indiquer quelles positions peut occuper l'objet AB pour qu'il se produise une image réelle de cet objet après réfraction de la lumière émise par AB à travers la lentille L et réflexion de cette lumière sur M.

Construire l'image dans une de ces positions.
Indice de réfraction de la lentille $= m$.
Rayon de courbure de la lentille $=$ R et R'.
Rayon de courbure du miroir $= 2$.
(*Au choix*). — *a*) Induction électrique.
b) Machine de Ramsden.
c) Machine d'Atwood.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

487. Arithmétique et Algèbre. — 1° Une montre avance de $2^m,27$. On la met à l'heure un jour à midi. Quelle heure sera-t-il quand elle marquera $9^h,20$ du matin le surlendemain;

2° x et y étant deux nombres à volonté, on calcule deux autres nombres x' et y' par les formules :

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = a'x + b'y + c'.$$

On emploie ces deux derniers pour en former deux nouveaux x'' y'' à l'aide des mêmes formules, et l'on demande de déterminer a', b', c', de manière que, quels que soient les nombres primitifs x, y, le résultat de l'opération soit de les reproduire, ou qu'en d'autres termes, on ait toujours

$$x'' = y,$$
$$y'' = y.$$

On vérifiera les valeurs obtenues.

488. Géométrie. — On donne dans un triangle isocèle, la base $2a$ et le rayon r du cercle inscrit. On demande de calculer le rayon R du cercle circonscrit. Si r reste le même et si a varie, on demande le minimum de R.

489. Physique et Chimie.

I. *Physique.* — Thermomètre à poids.
II. *Chimie.* — Acide azotique.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

490. Arithmétique. — Dans une montre, les aiguilles des heures, des minutes et des secondes étant sur midi, on demande au bout de combien de temps l'aiguille des secondes divisera en

deux parties égales l'angle compris entre les aiguilles des heures et des minutes.

491. Géométrie. — Une droite mobile OA passant par le point fixe O rencontre au point A la droite XY. Sur cette droite mobile, on prend un point A′ tel que le produit OA×OA′ soit constant. Quel est le lieu géométrique du point A′?

492. Algèbre. — Résoudre l'équation :

$$\log\sqrt{7x+5} + \log\sqrt{2x+3} = 1 + \log 4{,}5.$$

493. Calcul logarithmique. — Calculer :

$$x = \frac{2}{5}\sqrt[8]{\frac{\pi \times \sqrt[3]{0{,}0001}}{\sqrt{(2{,}693)^5} \times \pi^7}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

Questions diverses

494. — Construire un triangle isocèle connaissant sa base a et la longueur commune β des médianes aboutissant aux extrémités de cette base. Exprimer la valeur commune des côtés égaux en fonction de a et de β.

495. — Etant donné une circonférence de rayon $R = 1$, calculer la longueur du côté du polygone régulier de 24 côtés inscrits dans cette circonférence.

496. — On coupe une circonférence par une sécante rectiligne de position indéterminée passant par un point fixe donné dans son plan. Déterminer la position de cette sécante pour laquelle le triangle qui a pour sommets les traces de cette droite sur la circonférence et le centre de cette courbe a une aire maxima.

497. — Sur deux droites rectangulaires qui se coupent en un point o, on prend quatre points A, B, C, D, à une distance d du point o. De chacun de ces points comme centre on décrit quatre circonférences égales et tangentes deux à deux, puis on décrit une grande circonférence enveloppant les premières et leur étant tangente. Calculer le rayon de chacune de ces circonférences et le rapport de la surface de chacun des cercles intérieurs au grand cercle enveloppant. Quelle doit être la valeur de d pour que le rapport soit égal à 0,1 ?

498. — On donne dans un triangle un côté a, l'angle opposé A et la hauteur h relative au côté a. Terminer l'équation du second degré qui détermine les deux autres côtés b et c.

Quelle relation faut-il supposer entre les données a, A et h pour que le triangle soit rectangle ?

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses avec solutions

Déterminer cinq nombres en progression géométrique, connaissant leur somme et leur produit.

Soit a la somme et b^5 le produit donnés.

Si x désigne le nombre moyen et y la raison de la progression, on doit avoir

(1) $$\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y} + x + xy + xy^2 = a,$$

(2) $$\frac{x}{y^2} \cdot \frac{x}{y} \cdot x \cdot xy \cdot xy^2 = b^5.$$

De (2), on déduit immédiatement

$$x = b.$$

L'équation (1) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{y^2} + y^2 + \frac{1}{y} + y + 1 = \frac{a}{b}.$$

En posant $\frac{1}{y} + y = z$,

On a

$$\frac{1}{y^2} + y^2 = z^2 - 2,$$

et l'équation ci-dessus devient

$$z^2 + z - 1 - \frac{a}{b} = 0,$$

on tire de là

$$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}}.$$

Ces valeurs seront réelles quand on aura

$$\frac{a}{b} \geqslant -\frac{5}{4}.$$

Considérons d'abord la valeur positive de z.

On connait la somme z et le produit 1 des nombres y et $\frac{1}{y}$. Ces nombres sont donc racines de l'équation

$$X^2 - \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}}\right) X + 1 = 0,$$

qui, résolue, donne

$$\left.\begin{matrix} y \\ \frac{1}{y} \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{a}{b}}\right)^2 - 1}.$$

Ces deux racines sont toujours positives ; car leur produit 1 est positif, et leur somme est la valeur positive de z.

Pour que ces racines soient réelles, il faut que la quantité soumise au radical soit positive ou nulle.

On doit donc avoir

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{a}{b}} \geqslant 1,$$

ou

$$\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{a}{b}} \geqslant \frac{5}{2},$$

ou

$$\frac{a}{b} \geqslant 5.$$

Telle est la condition de possibilité qui se déduit de la valeur positive de z et qui correspond aux deux valeurs primitives de y ; mais, si l'on prend la valeur négative de z, on aura pour y deux valeurs négatives, qui conviendront également lorsqu'on aura

$$\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{a}{b}}\right)^2 \geqslant 1,$$

ou

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{a}{b}} \geqslant 1,$$

ou

$$\frac{a}{b} \geqslant 1.$$

Ainsi, lorsque $\frac{a}{b}$ est compris entre 1 et 5, il y a pour y deux valeurs négatives acceptables, et lorsque $\frac{a}{b}$ est plus grand que 5, il y a en outre, deux valeurs positives.

On verse chaque trimestre chez un banquier une somme de 100 fr. dont les intérêts à 5 $^0/_0$ par an doivent se capitaliser tous les trois mois. Quelle somme devra le banquier dix ans après le premier versement, c'est-à-dire trois mois après le 40e et dernier versement.

A partir de cette époque, quelle somme le banquier devra-t-il payer chaque semestre pour que sa dette soit amortie après 60 nouvelles années, les intérêts à 5 $^0/_0$ se capitalisant dans ce cas tous les 6 mois.

Il faut s'entendre sur le taux du placement trimestriel. Si la centième partie x de ce taux devait être telle qu'une somme de 100 francs, placée à intérêts composés pendant quatre trimestres, devient à l'expiration de ce temps, 105 francs, on aurait l'équation

$$100(1+x)^4 = 105.$$

D'où

$$x = \sqrt[4]{1,05} - 1.$$

Mais ce n'est pas là ce qu'on entend, en langage usuel, par intérêt trimestriel. Quand on dit que les intérêts d'une somme placée à 5 % par an se capitalisent tous les trois mois, on admet que l'intérêt trimestriel est le quart de 5 %, de sorte que l'intérêt annuel véritable, au lieu d'être de 5 %, est de

$$\left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^4 - 1 = 5{,}095\ \%\ \text{environ.}$$

Ceci admis, remarquons que chacun des versements ds 100 francs s'augmente des intérêts produit pendant toute la durée du placement, les intérêts étant capitalisés par trimestre sur le pied de $\frac{5}{4}$ %. Trois mois après le 40e versement, le banquier aura donc à payer une somme égale à

$$A = 100\left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{40} + 100\left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{39}$$

$$= \frac{101{,}25\left[(1{,}0125)^{40} - 1\right]}{0{,}0125} = 5\,213 \text{ fr. } 32.$$

Si le banquier attendait, pour rembourser sa dette, la fin de la soixantième année, il aurait à payer les intérêts étant capitalisés par semestre :

$$5\,213 \text{ fr. } 32\left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)^{120}.$$

D'autre part, chaque paiement a qu'il fait le libère de cette somme et des intérêts composés qu'elle aurait produits s'il l'avait gardée. A la fin de la soixantième année, les 120 paiements faits représentent donc un capital égal à

$$a\left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)^{119} + a\left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)^{118} = \frac{a\left[(1{,}025)^{120} - 1\right]}{0{,}025}.$$

En égalant ce capital à la somme précédente, on forme une équation d'où l'on tire a

$$a = \frac{5\,243^{\text{fr}},32 \times 0{,}025(1{,}025)^{120}}{(1{,}025)^{120} - 1} = 137^{\text{fr}},43.$$

Connaissant le volume $\frac{1}{3}\pi a^3$ *et la surface totale* πb^2 *d'un cône droit* SAB, *déterminer le rayon de base* R *et la hauteur* h. *Condition de possibilité du problème. Quelle relation faut-il supposer entre les données* a *et* b *pour que le triangle* SAB *obtenu en coupant le cône par* pxr *un plan passant par l'axe soit équilatéral.*

Le volume du cône étant représenté par $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ et sa surface totale par $\pi R\sqrt{R^2 + h^2} + \pi R^2$, les équations du problème sont

(1) $$R^2 h = a^3$$

(2) $$R\sqrt{R^2 + h^2} + R^2 = b^2.$$

L'équation (2) peut s'écrire

(3) $$R\sqrt{R^2 + h^2} = b^2 - R^2,$$

ou, en élevant au carré et simplifiant

$$R^2h^2 = b^4 - 2b^2R^2.$$

Remplaçant h par sa valeur tirée de (1), il vient

$$\frac{a^6}{R^2} = b^4 - 2b^2R^2,$$

ou

$$2b^2R^4 - b^4R^2 + a^6 = o.$$

Les valeurs de R^2, tirées de cette équation sent positives ; car leur somme $\frac{b^2}{2}$ est positive, ainsi que leur produit $\frac{ab}{2b^2}$. Pour que ces valeurs soient réelles, il faut que l'on ait

$$b^8 - 8b^2a^6 \geqslant o,$$

ou

$$6^6 \geqslant 8a6,$$

ou enfin

$$b^2 \geqslant 2a^2.$$

De plus, le premier membre de (3) étant positif, il faut que R^2 soit plus petit que b^2. En substituant b^2 à R^2 dans l'équation (4), on obtient

$$b^6 + a^6.$$

Ce résultat positif indique que b^2 est en dehors des racines. Comme b^2 est supérieur à la demi-somme $\frac{b^2}{4}$ des racines, ces racines sont inférieures à b^2. La seule condition de possibilité est donc

$$b^2 \geqslant 2a^2.$$

Les expressions de R et de h sont

$$R = \sqrt{\frac{b^2 \pm \sqrt{b^6 - 8a^6}}{4b}}$$

$$h = \frac{a^3}{R^2} = \frac{b(b^3 \pm \sqrt{b^6 - 8a^6})}{2a^3}.$$

La condition énoncée s'exprime par

$$h = R\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad a^3 = R^3\sqrt{3};$$

on déduit de là :

$$R = \frac{a}{\sqrt[6]{3}}.$$

En posant cette valeur dans l'équation (4), on a la rotation cherchée :

$$\frac{2b^2a^4}{\sqrt[3]{9}} - \frac{b^4a^2}{\sqrt[3]{3}} + a^6 = o$$

ou mieux :

$$2a^2b^2 - b^4\sqrt[3]{3} + a^4\sqrt[3]{9} = o.$$

Le côté d'un octogone régulier est a. *On propose de calculer :*

1° *Le rayon du cercle circonscrit à l'octogone ;*

2° *La longueur des cordes qui joignent les sommets de l'octogone de trois en trois ;*

3° *La surface de l'octogone.*

1° Soit O le cercle, de rayon x, circonscrit à l'octogone ABCDEFGH, de côté a.

Tirons AC, qui coupe BO en I. On a :

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2OB.OI$$

ou

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + x^2 - 2xOI \\ &= 2x^2 - 2xOI. \end{aligned}$$

Comme l'angle AOI vaut $\frac{1}{2}$ droit, le triangle rectangle AOI est isocèle, on a donc :

$$OI = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Par suite,

$$a^2 = 2x^2 - \frac{2x^2}{\sqrt{2}} = x^2(2 - \sqrt{2})$$

et

$$x = \frac{a}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{a}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

2° Le triangle rectangle ABE donne :

$$BE = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{4x^2 - a^2},$$

ou, en remplaçant x par sa valeur,

$$\begin{aligned} BE &= \sqrt{a^2(4 + 2\sqrt{2}) - a^2} \\ &= a\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = a(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

3° La surface de l'octogone est 8 fois plus grande que celle du triangle AOB et la quadruple de l'aire du triangle double ABE.

Son expression est donc :

$$4\,\frac{AB.BE}{2} = 2a^2(1 + \sqrt{2}).$$

Résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} &= 1, \\ x - y &= 217. \end{aligned}$$

Elevons la première équation au cube. Nous aurons :

$$x - y - 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) = 1.$$

ou, en tenant compte des équations données :

$$3\sqrt[3]{xy} = 216.$$

On tire de là :

$$xy = 373,248.$$

Si l'on pose :

$$y = -y',$$

on a :

$$x + y' = 217,$$
$$xy' = -373,248,$$

x et y' sont donc les racines de l'équation :

$$X^2 - 217X - 373,248 = 0$$

qui donne, en résolvant :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y' \end{matrix}\right\} = \frac{217 \pm 1\,241}{2} = \left\{\begin{matrix} 729 \\ -512. \end{matrix}\right.$$

Le système proposé est vérifié par les deux solutions :

$$x = 729$$
$$y = 512$$
$$x = -512$$
$$y = -729.$$

Deux mobiles m *et* n *partent de deux points* A *et* B *et vont à la rencontre l'un de l'autre*; m *se met en mouvement* 5 *secondes après* n *et parcourt* 4 *mètres de plus que lui par seconde. Ils se rencontrent au milieu de* AB *dont la longueur égale* 1 250 *mètres. Combien chacun des mobiles parcourt-il de mètres à la seconde ?*

Soient x et y les vitesses respectives des mobiles m et n. Si t désigne le temps écoulé depuis le départ de m jusqu'à l'instant de sa rencontre avec n, on a, d'après l'énoncé :

(1) $$xt = 625$$
(2) $$y(t + 5) = 625$$
(3) $$x - y = 4,$$

multiplions (1) par y et (2) par x ; puis, retranchons membre à membre. Il vient :

$$5xy = 625(x - y)$$

ou, d'après (3)

$$xy = 125 \times 4 = 500$$

x et $-y$ sont donc les racines de l'équation :

$$X^2 - 4X - 500 = 0.$$

On trouve :

$$x = 24^{m},45$$
$$y = 20^{m},45.$$

QUATRIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

La technique des rayons X, manuel opératoire de la radiographie et de la fluoroscopie à l'usage des médecins, chirurgiens et amateurs de photographie, par Alexandre Hébert, préparateur à la faculté de médecine (Carré et Naud, 3, rue Racine).

Cet ouvrage correspond à une actualité qui intéresse tout le monde. Tous les journaux scientifiques ont consacré de nombreux articles à cette magnifique découverte du Dr Rœntgen, et la presse quotidienne s'en est emparée au point de vue des faits et des applications pratiques.

M. Hébert a su donner de la technique et de l'emploi des rayons X une idée assez précise, pour permettre au lecteur non encore initié au mode opératoire, de produire chez lui ces rayons et de les appliquer sans difficulté à l'inspection des parties profondes du corps humain.

Il indique au lecteur la façon d'acheter le matériel nécessaire, de l'entretenir en bon état et de s'en servir. S'il veut bien suivre le manuel opératoire, d'ailleurs très simple, que décrit ce petit livre, il aura la surprise d'obtenir, du premier coup et sans effort, des images d'un genre nouveau, dont la beauté ne le cédera en rien à celle des radiographies qui ont été publiées un peu partout.

L'Enseignement Mathématique, revue internationale paraissant tous les deux mois. *Directeurs* : C. A. Laisant, docteur ès sciences, répétiteur à l'Ecole Polytechnique et H. Fehr, Privat-docent à l'Université de Genève, professeur au Collège et à l'Ecole professionnelle. — Editeurs : Carré et Naud, 3, rue Racine.

Cette nouvelle revue se présente sous les auspices de deux hommes qui occupent une haute situation dans le monde scientifique : M. Laisant, dont on connait les remarquables travaux scientifiques et M. Fehr, qui est un des savants les plus distingués de la Suisse.

C'est assez dire que cette revue offrira le plus grand intérêt à tous ceux qui suivent le mouvement scientifique.

Cette publication a un caractère franchement et hautement international et le comité se compose des plus éminents mathématiciens de toutes les nations. Chaque numéro contiendra, en principe : 1° des articles généraux; 2° des études pédagogiques; 3° une chronique et des correspondances; 4° une partie bibliographique. La philosophie scientifique y tiendra sa place et les articles qu'elle inspirera ne manqueront pas d'offrir au lecteur un attrait tout particulier.

On ne peut qu'applaudir à la fondation de cette œuvre nouvelle, au commencement de ce xxe siècle, puisque ce siècle, comme le disent les directeurs de la revue dans leur premier article : « Soit au point de vue « de la science pure, soit à celui des applications manifestera des exigences « auxquelles personne ne doit ni ne peut se dérober ».

Géométrie cotée, par Lucien Ibach, directeur de l'Ecole Malesherbes et G. Mariaud, professeur à Sainte-Barbe.

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge du livre de *Géométrie cotée* de MM. Ibach et Mariaud. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que toutes les questions y sont traitées de la façon la plus complète. Pour chaque question, les auteurs ne se contentent pas d'une solution : presque toutes comportent plusieurs solutions, qui y sont exposées et développées. Dans chaque cas particulier, l'élève pourra choisir la plus rapide et la plus élégante et s'habituer à faire ainsi sans difficulté et dans le temps voulu les épures comprises dans les programmes des Ecoles.

Le traité est divisé en deux parties : le *texte* et les *planches*. Cette dernière partie comprend 235 planches admirablement gravées et qui ne peuvent que faciliter le travail du candidat. Rien n'a été négligé dans ce but.

Comme le dit dans sa préface M. Klein, directeur de l'Institut commercial, qui a bien voulu présenter ce livre aux lecteurs : « Ce traité, bien « étudié, bien conçu dans l'esprit des programmes, contient tout ce qu'un « candidat sérieux doit posséder ; il rendra des services signalés aux jeunes « gens... et il se distingue très nettement et très avantageusement de tous « ceux qui ont été écrits avant lui. »

Opinions et Curiosités touchant la Mathématique, d'après les ouvrages français des xvie, xviie et xviiie siècles, par Georges Maupin, licencié ès sciences mathématiques et physiques. 1 vol. in-8° carré de 200 pages, avec figures, cartonné à l'anglaise. Prix : 5 francs (Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine, Paris).

Quelles opinions avaient de l'utilité des mathématiques dans les siècles précédents non seulement les savants, mais surtout les faiseurs de livres et même les ignorants ? Quels avantages pensait-on en retirer pour l'éducation ; quelle liaison singulière voulait-on établir entre la doctrine mathématique et la religion ? Voilà ce qui est traité dans ce volume. En donnant des extraits curieux et piquants des auteurs qu'il cite, M. Maupin ne s'est permis d'y ajouter que de brefs commentaires et de courtes notes biographiques, ne voulant rien ôter de leur caractère aux textes mentionnés. Ajoutons que ce n'est pas là un ouvrage savant et que, dans ses parties les plus saillantes, on s'est efforcé de le rendre intelligible à tous ceux qui ont en mathématiques des connaissances moyennes. Ce livre a, par ailleurs, un côté documentaire qui séduira les personnes qu'intéresse l'évo-

lution de l'esprit mathématique à travers les graves querelles d'écoles et les discussions brûlantes des dogmatistes. — Les mathématiciens trouveront un vif intérêt à cette excursion rétrospective dans le domaine de la géométrie, et les curieux, que n'effrayent pas les soutenances imprévues, prendront plaisir à l'intervention des mathématiques dans le dogme de la Présence réelle. — D'autre part, le volume de M. Maupin, en tout décidément instructif, nous donne, en manière d'actualité, des aperçus originaux sur ce que pensaient de l'utilité du latin dans l'enseignement les maîtres d'autrefois. — Rien des idées que nous émettons aujourd'hui sur ce sujet sont, à la vérité, celles d'hier et nous devons au livre de M. Maupin la satisfaction de l'apprendre.

Le *Journal du Ciel*, revue scientifique couronnée par l'Académie des sciences (directeur : Joseph Vinot ✵, lauréat de l'Institut), cour de Rohan, Paris, est un journal de vulgarisation des plus intéressants. Ses notions populaires d'astronomie pratique sont à la portée de tous.

Par une ingénieuse combinaison, le *Journal du Ciel* prête à chacun de ses abonnés une lunette grossissant cinquante fois en diamètre.

Sur les tranformées des radicaux doubles réels ou imaginaires, par Léon Moreau, docteur en sciences physiques et mathématiques (Bruxelles. Charles Rozez, 81, rue de la Madeleine. — Paris, Giard et Brière, éditeurs, 16, rue Soufflot).

Cette brochure commence par un exposé très net de la théorie [illegible] nombres complexes.

Les divers cas de transformation des radicaux y sont ensuite traités d'une façon très ingénieuse, en partie nouvelle, et où notamment se trouve établie clairement la discussion relative à la fixation des signes.

Ce petit ouvrage se recommande par lui-même à tous ceux qu'intéressent les mathématiques, professeurs et candidats.

Problèmes de géométrie élémentaire, groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution, par Yvan Alexandroff, professeur de mathématiques au lycée de Tambow (Russie), traduit du russe, sur la sixième édition, par D, Aitoff (Librairie scientifique, A. Hermann, 8, rue de la Sorbonne).

Cet ouvrage, très intéressant, a ceci de particulier qu'il classe les problèmes d'après les méthodes à employer pour leur résolution.

M. Alexandroff s'attache surtout aux méthodes suivantes : lieux géométriques, similitude, constructions inverses, symétrie, translation, rotation, inversion, application de l'algèbre à la géométrie. En tête de chaque cha-

pitre est un exposé de la méthode à employer, suivi d'un nombre considérable de problèmes types, avec une solution complète pour chacun d'eux. Puis, viennent les exercices pouvant être facilement résolus, si l'on s'est bien assimilé la marche suivie dans les problèmes résolus.

Cette classification offre les plus grands avantages et donne les meilleurs résultats.

Le livre de M. Alexandroff comble une véritable lacune et nous ne doutons pas qu'il ait le même succès en France qu'en Russie, où il a atteint en peu de temps sa sixième édition.

Calcul de généralisation, par G. Oltramare, doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Genève (Librairie scientifique A. Hermann, 8, rue de la Sorbonne).

Le calcul de généralisation faisant l'objet de l'ouvrage de M. Oltramare, a pour base la représentation des fonctions uniformes sous une forme symbolique, telle que l'on puisse effectuer sur ces fonctions les principales opérations auxquelles elles sont soumises, comme leur différentiation et leur intégration, à l'aide d'un calcul algébrique très simple à effectuer.

Après avoir établi quelques principes généraux, l'auteur s'applique à déterminer une intégrale particulière de toute équation différentielle ou aux différences et différentielles partielles linéaires à coefficients constants avec un second membre. Il traite également de l'intégration des équations simultanées, des équations aux différences mêlées et de certaines classes d'équations aux différentielles partielles avec des coefficients variables.

« Les [illegible] dés dont s'occupe M. Oltramare sont pour l'analyse supérieure, « ceux que sont les logarithmes pour le calcul [illegible] : ils diminuent, [illegible] beaucoup de cas, les difficultés de la différentiation et de l'intégration.

Nous croyons que son ouvrage devra être consulté par tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques.

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTERAIRE BUSSIÈRE FRERES.

TABLE DES MATIÈRES

